8 Modele atmosfer

8.1 Warunek równowagi hydrostatycznej

Ponieważ w atmosferze promieniowanie nie znajduje się stanie LTE, ciśnienia promieniowania i gazu trzeba (na ogół) traktować oddzielnie. W warunku równowagi dla gwiazd sferycznych (rów. 4) kładziemy $p = p_{\rm g} + p_{\rm rad}$ i dostajemy

$$\frac{dp_{\rm g}}{dr} = -\rho g - \frac{dp_{\rm rad}}{dr}. \tag{210}$$

Korzystamy z wyrażenia (159) na $p_{\rm rad}$. Skąd,

$$\frac{dp_{\rm rad}}{dr} = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\infty} \frac{dI_\nu}{dr} d\nu \mu^2 d\mu. \tag{211}$$

Pochodną I_ν wyliczymy korzystając ze równania (192), które przepiszemy do postaci,

$$\mu \frac{dI_\nu}{dr} = -\frac{(1-\mu^2)}{r} \frac{dI_\nu}{d\mu} + \rho\kappa_\nu (S_\nu - I_\nu).$$

Wstawiamy to wyrażenie do (211) i całkujemy po μ. Pierwszy człon całkujemy przez części (wkład brzegowy znika). Dalej korzystamy ze wzoru (187) na średnią intensywność i wprowadzamy standardowe oznaczenie drugiego momentu intesywności promieniowania

$$\mathcal{K}_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\nu \mu^2 d\mu.$$

Człon zawierający funkcję źródłową znika po całkowaniu. Tak dostajemy

$$\frac{dp_{\rm rad}}{dr} = \frac{2\pi}{c} \int_{0}^{\infty} \left(2\frac{\mathcal{J}_\nu - 3\mathcal{K}_\nu}{r} - \rho\kappa_\nu \mathcal{F}_\nu \right) d\nu. \tag{212}$$

Używając tego wyrażenia w (210) oraz korzystając ze wzorów (156) i (159) na gęstość energii i ciśnienie promieniowania, dostajemy

$$\frac{dp_{\rm g}}{dr} = -\rho g + \frac{\rho}{c} \int_{0}^{\infty} \kappa_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu + \frac{3p_{\rm rad} - E_{\rm rad}}{r} \tag{213}$$

To wyrażenie poprawnie opisuje wpływ promieniowania na równowagę hydrostatyczną w atmosferze gwiazdy. Jego ostatni człon uwzględnia krzywiznę atmosfery i jest pomijany w przybliżeniu płasko-równoległym, które jest dobre gdy skala zmian tempertury jest krótka w porównaniu z promieniem fotosfery. Ten ostatni człon jest też pomijalny we wnętrzu gwiazdy, gdzie $E_{\rm rad} \approx 3p_{\rm rad}$.

8.2 Jasność Eddingtona

Realistycznym warunkiem brzegowym dla modeli gwiazd nie może być $p = 0$. Istotne jest to, aby na zewnętrznym brzegu gwiazdy ($r = R$) można założyć

$\tau \approx 0$. W praktyce wybieramy jako brzeg miejsce o dostatecznie niskiej gęstości. Istotne jest też spełnienie nierówności

$$\frac{dp_g}{dr} < 0 \text{ dla } r = R,$$

co, w przybliżeniu atmosfery płasko-równoległej, oznacza

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu < cg \tag{214}$$

Dla atmosfery szarej nakłada ona górne ograniczenie na jasność gwiazdy, nazywane *jasnością Eddingtona*, $L_{\rm Edd}$. Mamy wtedy $\kappa(R)\mathcal{F}_{\rm rad} < cg$, co prowadzi do

$$L < L_{\rm Edd} = \frac{4\pi cGM}{\kappa(R)}. \tag{215}$$

Dla obiektów gorących, dla których dominującym źródłem nieprzezroczystości w atmosferach jest rozpraszanie na wolnych elektronach. Wtedy $\kappa(R) \approx 0.2(1+X)$ (wzór 175) i dla $X = 0.7$ dostajemy liczbowo

$$\frac{L_{\rm Edd}}{L_\odot} \approx 3.5 \times 10^4 \frac{M}{M_\odot}.$$

Dla gwiazdy wieku zero o masie $100 M_\odot$ mamy $L = 0.37 L_{\rm Edd}$.

8.3 Atmosfery szare

Model płasko-równoległej atmosfery szarej wyznaczają trzy parametry g, $\mathcal{F}_{\rm rad}$ i κ, równanie stanu gazu $p_g = p_g(\rho, T, \boldsymbol{X})$ i zależność $T(\tau)$. Gdy efekty krzywizny atmosfery są istotne, bądź gdy chcemy uzyskać model głębszej otoczki, dwa pierwsze parametry należy zastąpić trzema n,p. : M,R i L. Wielkim ułatwieniem wynikającym z założenia szarości atmosfery jest to, że funkcja $T(\tau)$ jest znajdowana niezależnie od struktury atmosfery.

8.3.1 Zależność $T\tau)$ w modelu Eddingtona

W klasycznym modelu Eddingtona zapisujemy równanie transferu w płasko-równoległej szarej atmosferze anizotropię pola promieniowani sprowadza się do rozróżnienia strumienia skierowanego na zewnątrz (z) i do wewnątrz (w). Mamy więc

$$I_(\mu) \equiv \begin{cases} I_z & \text{dla } \mu > 0 \\ I_w & \text{dla } \mu < 0 \end{cases} \tag{216}$$

Jest to najprostsza forma anizotropii intensywności pozwalająca na wprowadzenie warunku brzegowego (181), który teraz sprowadza się do $I_w(0) = 0$. Używając tego wyrażenia na I w wyrażeniach w (156-159), dostajemy, kolejno,

$$E_{\rm rad} = \frac{4\pi B}{c} = \frac{2\pi}{c}(I_z + I_w). \tag{217}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{rad}} = \frac{L}{4\pi r^2} = \pi(I_z - I_w). \tag{218}$$

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi}{3c}(I_z + I_w). \tag{219}$$

Z (217) i (219) wynika, $p_{\mathrm{rad}} = E_{\mathrm{rad}}/3$, czyli ten sam związek, co przy złożeniu lokalnej równowagi termodynamicznej promieniowania z gazem. Z (212) dla szarej płasko-równoległej atmosfery, wynika

$$\frac{dE_{\mathrm{rad}}}{d\tau} = 3\frac{dp_{\mathrm{rad}}}{d\tau} = \frac{3}{c}\mathcal{F}_{\mathrm{rad}}, \tag{220}$$

które po położeniu $\kappa = \kappa_R$ staje się równoważne (168), chociaż dla jego wyprowadzenia nie korzysta się z założenia $\tau \gg 1$. Tak więc w tym przybliżeniu, dla modelowania atmosfery można używać tych samych równań co dla reszty gwiazdy. Całkowanie (220) z wykorzystaniem warunku brzegowego $I_w(0) = 0$, prowadzi do

$$E_{\mathrm{rad}} = \frac{3}{c}\mathcal{F}_{\mathrm{rad}}\left(\tau + \frac{2}{3}\right). \tag{221}$$

Stąd oraz z (217) i (218) znajdujemy

$$I_z = \frac{\mathcal{F}_{\mathrm{rad}}}{\pi}\left(\frac{3}{4}\tau + 1\right) \tag{222}$$

i

$$I_w = \frac{\mathcal{F}_{\mathrm{rad}}}{\pi}\frac{3}{4}\tau \tag{223}$$

Z (221), po podstawieniu $E_{\mathrm{rad}} = aT^4$ dostajemy

$$T^4 = \frac{3}{ac}\frac{L}{4\pi R^2}\left(\tau + \frac{2}{3}\right), \tag{224}$$

a więc poszukiwaną zależnoćś $T(\tau)$. Korzystając z definicji temperatury efektywnej, można tę relację zapisać w postaci

$$T^4 = T_{\mathrm{eff}}^4\left(\frac{3}{4}\tau + \frac{1}{2}\right).$$

Zewnętrzny warunkiem brzegowy jest więc związek

$$T(R) = \left(\frac{L}{2ac\pi R^2}\right)^{1/4} = 2^{-1/4}T_{\mathrm{eff}}. \tag{225}$$

Oczywiście lepiej zamiast modelu Eddingtona używać zaawansowanych modeli atmosfer, uwzględniających zależność $\kappa(\nu)$, opartych na ścisłych rozwiązaniach równania (184), oraz ewentualnie uwzględniających krzywiznę i odstępstwa od lokalnej równowagi termodynamicznej. Zastosowanie dokładnych modeli rzadko jednak ma istotne konsekwencje dla opisu struktury wnętrza.

Z liniowej zależności $E_{\rm rad} = 4\pi B/c$ od τ, zgodnie ze wzorem Eddingtona-Barbiera (201) wynika

$$I_{0,\mu} = I_{0,0}(1 + 1.5\mu).$$

Ten wzór jest sprzeczny z z (216), ale nie najgorzej zgadza się z obserwacjami. Często, dla uniknięcia tej sprzecznosci, za przybliżenie Eddigtona uważa się założenie $p_{\rm rad} = E_{\rm rad}/3$.

8.3.2 Ścisłe rozwiązanie dla atmosfery szarej

Poprawienie modelu Eddingtona, polegające na ścisłym rozwiązywaniu równania (208)jest stosunkowo łatwe, ale niestety niewiele nas zbliża do rzeczywistości fizycznej. Warto jednak poświęcić tej sprawie jeden podrozdzial, aby przybliżyć matematyczne aspekty realistycznego modelownia atmosfer gwiazdowych. Przedstawiam zarys rozwiązania problemu atmosfer metodą Chandrasekhara. Podstawą jej jest dyskretyzacja funkcji $I(\tau, \mu)$ względem μ. W równaniu (208) zastępujemy

$$\int_{-1}^{1} I d\mu \to \sum_{j=-n}^{n} a_j I_j,$$

gdzie $I_j \equiv I(\mu_j)$, a a_j są odpowiednimi wagami, spełniającymi $a_{-j} = a_j$ i

$$\frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1.$$

Punkty sieciowe rozmieszczone są symetrycznie ($\mu_{-j} = -\mu_j$). Chandrasekhar wybrał je w miejscach zerowych wielomianów Legendra parzystych stopni ($P_{2n}(\mu) = 0$). Taki wybór punktów sieciowych pozwala na uzyskanie dobrego przybliżenia przy niskim n.

Po tym zastąpieniu, (208) przechodzi w układ $2n$ zwyczajnych równań różniczkowych pierwszego stopnia,

$$\mu_i \frac{dI_i}{d\tau} - I_i = -\frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} \alpha_j I_j \quad i = \pm 1, \pm 2, ... \pm n. \tag{226}$$

Ponieważ współczynniki nie zależą od τ, szukamy rozwiązań w postaci,

$$I_i = A_i \exp(-k\tau).$$

Po podstawieniu do układu znajdujemy $A_i = A(1+k\mu_i)^{-1}$ i warunek by $A \neq 0$,

$$1 = \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} \alpha_j (1 + k\mu_j)^{-1}.$$

Przekształcamy go korzystając z pomocą równości

$$\sum_{j=-n}^{n} \alpha_j (1 + k\mu_j)^{-1} = 2\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (1 - k^2\mu_j^2)^{-1}$$

w równanie algebraiczne na k^2,

$$W(k) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (1 - k^2 \mu_j^2)^{-1} = 0. \tag{227}$$

Równanie to ma pierwiastek podwójny $k_0^2 = 0$, co oznacza, że znacza. że rozwiązaniami na $I_{i,0}$ są funkcje liniowe. Z (226) znajdujemy, że wtedy $I_{i,0} \propto \tau + Q + \mu_i$, gdzie Q jest na razie dowolną stałą .

Ponieważ przy $k = 0$ mamy $W = 0$ i ze wzrostem k początkowo $W < 0$, niezleżnie od wartości μ, a następie $W(k)$ zmienia znak przez nieskończoność kolejno dla $k^2\mu_j^2 = 1$, to pozostałe pierwiastki rozmieszczone są jak następuje,

$$\mu_n^{-2} < k_1^2 < \mu_{n-1}^{-2} < k_2 < \mu_{n-2}^{-2} ... < k_{n-1}^2 < \mu_1^{-2}.$$

Ogólnym rozwiązaniem (226) jest

$$I_i(\tau) = \mathcal{C} \left[\tau + Q + \mu_i + \sum_{l=1}^{n-1} \left(\frac{\mathcal{L}_l \exp(-k_l \tau)}{1 + k_l \mu_i} + \frac{\mathcal{L}_{-l} \exp(k_l \tau)}{1 - k_l \mu_i} \right) \right] \tag{228}$$

Do wyznaczenia są stałe $\mathcal{C}$, Q, $\mathcal{L}_l$ i $\mathcal{L}_{-l}$. Skorzystamy wpierw z tego, że dla

$$\tau \to \infty \qquad I_i(\tau) \to I_z \to I_w = \frac{\mathcal{F}_{\rm rad}}{\pi} \frac{3}{4} \tau,$$

bo rozwiązanie, tak jak w modelu Eddingtona (rów. 222 i 223), powinno zmierzać do przybliżenia dyfuzyjnego. Dlatego mamy,

$$\mathcal{L}_{-l} = 0 \quad \text{i} \quad \mathcal{C} = \frac{3}{4\pi} \mathcal{F}_{\rm rad}.$$

Zewnętrzny warunek brzegowy (181), oznacza tu że, przy $\tau = 0$, $I_i = 0$ dla $i < 0$. Tak dostajemy układ n równań liniowych niejednorodnych na pozostałe stałe,

$$Q + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mathcal{L}_l}{1 - k_l \mu_i} = \mu_i. \tag{229}$$

Wyrażenie

$$I_i(\tau) = \frac{3\mathcal{F}_{\rm rad}}{4\pi} \left(\tau + Q + \mu_i + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\mathcal{L}_l \exp(-k_l \tau)}{1 + k_l \mu_i} \right). \tag{230}$$

jest ścisłym rozwiązaniem równania (226), a przy $n \to \infty$, również (208).

Gęstość energii promieniowania (wzór 162) w funkcji głębokości optycznej znajdziemy ze wzoru

$$E_{\rm rad} = aT^4 = \frac{4\pi}{c} J = \frac{2\pi}{c} \sum_{-i}^{i} \alpha_i I_i(\tau).$$

Przy sumowaniu członu zawierającego $\mathcal{L}_l$ korzystamy z (227) i dostajemy

$$E_{\text{rad}}(\tau) = \frac{3}{c}\mathcal{F}_{\text{rad}}\left(\tau + Q + \sum_{l=1}^{n-1}\mathcal{L}_l \exp(-k_l\tau)\right) \tag{231}$$

Łatwo sprawdzić, że ciśnienie promieniowania nie jest już dane przez $E_{\text{rad}}(\tau)/3$, zatem nie włącza się go do ciśnienia całkowitego i korzysta się z równania (213) jako warunku równowagi mechanicznej, który dla atmosfery szarej upraszcza się do

$$\frac{dp_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\rho}{c}\kappa\mathcal{F}_{\text{rad}}$$

.

8.4 Modele atmosfer nieszarych

Poprawne uwględnienie zależności wspóczynnika absorbcji stanowi najważniejszy , a wielu zastosowaniach wystarczający, krok w kierunku realistycznych modeli atmosfer gwiazdowych. Krok ten oznacza znaczne utrudnienie problemu rozwiazywania równania transferu, które teraz należy rozwiązywać łącznie z równaniem równowagi mechanicznej.

Najważniejszym celem jest wyznaczenie rozkladu intensywności promieniowania opuszczającego gwiazdę, które pozwala na wyliczenie rozmaitych fotometrycznych i spektroskopowych obserwabli.

8.4.1 Równania

Wypiszmy tu komplet równań dla przypadku płasko-równoległej atmosfery, LTE, oraz izotropowego rozpraszania. Jako zmiennej niezależnej określającej miejsce w atmosferze będziemy używać gęstości powierzchniowej,

$$m = \int_r^R \rho dr. \tag{232}$$

Pozostałe zmienne niezależne to ν i μ. Stan atmosfery opisują wielkości zależne tylko od m: p, ρ i T; wielkości zależne tylko od ν i m: $\mathcal{F}_\nu$, κ_ν, i $\mathcal{B}_\nu$; oraz wielkość $I_\nu(m,\mu)$, która jest funkcją wszystkich trzech zmiennych niezależnych. Zmierzamy do wyliczenia wszystkich zmiennych zależnych, w tym przede wszystkim rozkładu intensywności na powierzchni gwiazdy, $I_\nu(0,\mu)$, dla założonych wartości parametrów globalnych

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad T_{\text{eff}} \equiv \left(\frac{L}{\pi acR^2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{X},$$

Równania transferu (193) zapisujemy w postaci

$$\mu\frac{dI_\nu}{dm} = \kappa_\nu(I_\nu - S_\nu), \tag{233}$$

gdzie zgodnie ze (191) i (187)

$$S_\nu = (1 - \chi_\nu)\mathcal{B}_\nu + \chi_\nu \mathcal{J}_\nu, \tag{234}$$

$$\chi_\nu = \kappa_{s,\nu}/\kappa_\nu, \quad \kappa_\nu = \kappa_{a,\nu} + \kappa_{s,\nu}$$

$$\mathcal{J}_\nu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu')d\mu'.$$

Równanie równowagi hydrostatycznej (213) w postaci

$$\frac{dp_{\rm g}}{dm} = g - \frac{1}{c}\int_0^\infty \kappa_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu. \tag{235}$$

Dochodzą dwa związki całkowe:
(1) warunek równowagi cieplnej (190)

$$\int_0^\infty \kappa_{a,\nu}\mathcal{J}_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_{a,\nu}\mathcal{B}_\nu(T)d\nu \tag{236}$$

i (2) wyrażenie na strumień

$$\mathcal{F}_\nu = 2\pi\int_{-1}^{1} I_\nu \mu d\mu. \tag{237}$$

Zakładamy, że mamy dane w formie tablic następujące lokalne zależności

$$p_g = p_g(\rho, T, \boldsymbol{X}), \tag{238}$$

$$\kappa_{a,\nu} = \kappa_{a,\nu}(\rho, T, \boldsymbol{X}) \tag{239}$$

i

$$\kappa_{s,\nu} = \kappa_{s,\nu}(\rho, T, \boldsymbol{X}), \tag{240}$$

w całym potrzebnym zakresie parametrów.

Zewnętrzny warunek brzegowy (181) zapisujemy jako

$$I_\nu(m = 0, \mu) = 0 \quad \text{dla} \quad \mu < 0. \tag{241}$$

Całkowanie równania (235) zaczynamy od dostatecznie niskich gęstości,

Wewnętrznym warunkiem brzegowym, podobnie jek w przypadku atmosfery szarej, jest żądanie by na dużych głębokościach optycznych w całym zakresie widma rozwiązania na I_ν, zanierzały do przybliżeniem dyfuzyjnego, czyli, żeby zachodziło

$$I_\nu(m, \nu) \to \mathcal{B}_\nu(\tau_\nu) + \frac{d\mathcal{B}_\nu}{d\tau_\nu}\mu, \quad \text{dla wszystkich} \quad \tau_\nu = \int_0^m \kappa dm' \to \infty \tag{242}$$

co, podobnie jak dla atmosfery szarej, domyka problem.

8.4.2 Konstrukcja modelu

Przegląd metod rozwiązywania transferu i budowania modeli atmosfer nieszarych można znaleźć w podręczniku K. Stępnia. Tu ograniczam się do opisania ogólnych zasad. Wszystkie metody opierają się na dyskretyzacji intensywności, $I_\nu(m,\mu)$, którą przyblżamy trójwymiarową tablicą

$$I_{\nu_n,m_i,\mu_j} \equiv I_{nij}, \quad n = 1,...,n_t, \quad i = 1,...,i_t \quad j = 1,...,j_t \tag{243}$$

Dla innych wielkości liczba wymiarów jest niższa, ale zachowamy zawsze tę samą interpretację wskaźników.

Wszystkie metody rozwiązują równania w sposób iteracyjny, startując od próbnych wartości ρ_i^0, T_i^0, które na przykład można dostać z przybliżenia atmosferą szarą . Znając te wielkości, możemy wyliczyć $\mathcal{B}_{ni}$ i, korzystając z (239) i (240), przybliżone wartości wszystkich współczynników w równaniu (233). Utrudnieniem, w porównaniu z atmosferą szarą jest dodatkowe sumowanie I_{nij} po wskażniku n , ale zasada jest podobna. Dla każdego i mamy teraz nie j_t, a $n_t \times j_t$ niewiadomych, ale mamy też n_t razy więcej zależności wynikających z (233) i warunków brzegowych wynikających z (241) i (242). W praktyce, trudność wynika nie tylko ze znacznie większej ilości niewiadomych, ale też z z dużych różnic głębokości optycznej w różnych częstotliwościach.

Więzy na prawdziwe wartości ρ_i i T_i wynikają z wrunków równowagi (235) (236) . Używając wyznaczonych wartości I_{nij} w (237), możemy wyliczyć $\mathcal{F}_{nm}$, a następnie z (235) znależć $p_{g,m}$. Ta wartość będzie różna od wartości $p_{g,i}^0$, wynikającej z równania stanu (238) po podstawieniu wartości ρ_i^0 i T_i^0 Równania (236) też nie będzie spełnione, potrzebne jest iteracyjne poprawianie ρ_i i T_i.