

13 Modele ewolucyjne gwiazd

Konwencja: Lokalne parametry fizyczne ewoluujących gwiazd traktujemy jako funkcje czasu t i lokalnej masy M_r . Symbol d/dt oznacza pochodną przy ustalonym M_r , a symbol d/dM_r pochodną przy ustalonym t .

13.1 Źródła zmian ewolucyjnych

13.1.1 Nierównowaga cieplna

Ewolucja zachodzi w stanie nierównowagi cieplnej gdy

- (i) brak dostatecznie wydajnych jądrowych źródeł energii albo
- (ii) występuje niestabilność cieplna.

Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia, na przykład, w fazie ewolucji przed ciągiem głównym, kiedy temperatura w jądrze gwiazdy jest zbyt niska dla syntezy wodoru. Zachodzi wtedy kontrakcja całej gwiazdy w cieplnej skali czasowej danej równaniem (313). Także po zakończeniu fazy ciągu głównego gwiazdy masywne, prędzej czy później, tracą równowagę cieplną. Po wyczerpaniu wodoru w jądrze konwektywnym jego struktura zmienia się w izotermiczną. Jeżeli względna masa takiego jądra przekracza pewną krytyczną wartość, to następuje jego kontrakcja w skali cieplnej. Kończy ją bądź degeneracja elektronów, bądź – w przypadku gwiazd o większej masie gwiazdy przekraczającej ok. $2.25M_{\odot}$ – początek syntezy węgla. Białe karły i gwiazdy neutronowe też ewoluują w skali cieplnej, ale wzór (313) dla tych obiektów się nie stosuje, bo został wyprowadzony przy założeniu równania stanu gazu doskonałego.

Nukleosynteza jest niestabilna wtedy, gdy wzrost wydzielanej energii w reakcjach nie powoduje istotnego wzrostu ciśnienia, co było wyjaśnione w rozdziale 11.3. Spotykamy się z tą sytuacją w fazie *zapalenia helu* w zdegenerowanych jądrach gwiazd. Niestabilność cieplna występuje też wtedy, gdy reakcja palenia helu zachodzi w cienkiej warstwie nad węglowo-tlenowym jądrem. W tym przypadku niestabilność prowadzi do cyklicznych zmian parametrów gwiazdy zachodzących w cieplnej skali czasowej.

W modelowaniu ewolucji gwiazd posługujemy się zawsze równaniem bilansu ciepła uwzględniając pochodną czasową entropii (rów. 244). Tak więc, dla ewoluujących gwiazd sferycznych w miejsce równania (318) używamy równania (244) w symetrii sferycznej,

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon - \frac{du}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}.$$

Po skorzystaniu ze wzorów (107-109) z rozdz 5.1, dostajemy

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon - c_v \left[\frac{dT}{dt} - (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right] - \sum_j \frac{\partial u}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dt}. \quad (356)$$

Pochodna czasową u wyrażiliśmy przez pochodne ρ , T i względnych obfitości pierwiastków. W tym rozdziale, tak jak w warszawskim kodzie ewolucyjnym, wybieramy ρ i T jako podstawowe zmienne termodynamiczne.

Posługując się tym równaniem uwzględniamy automatycznie nierównowagę cieplną. Oczywiście jeżeli ewolucja postępuje w jądrowej skali czasowej, to człony zawierające pochodne czasowe są małe.

13.1.2 Zmiany składu chemicznego

Ewolucja chemiczna gwiazd jest skutkiem nukleosyntezy, mieszania pierwiastków, dyfuzji i selektywnego ciśnienia promieniowania. Tu napiszemy formalnie

$$\frac{dX_i}{dt} = \mathcal{C}_{i,\text{nuc}} + \mathcal{C}_{i,\text{mix}} + \mathcal{C}_{i,\text{dif}}. \quad (357)$$

Tempo zmian względnej obfitości i -tego izotopu w wyniku reakcji termo-jądrowych dane jest wzorem,

$$\mathcal{C}_{i,\text{nuc}}(\rho, T, \mathbf{X}) = \frac{\rho}{m} \left[\sum_j \sum_k \lambda_{j,k} A_i \frac{X_j X_k}{A_j A_k} - \sum_l \lambda_{i,l} \frac{X_i X_l}{A_l} \right], \quad (358)$$

kóry wynika ze wzoru (288) dla izotopów stabilnych.

Mieszanie pierwiastków w konwektywnych jądrach jest procesem bardzo szybkim. Zachodzi w skali czasowej dłuższej niż τ_d , ale znacznie krótszej niż τ_{th} .

Ocenę czasu mieszania daje nam iloraz drogi mieszania i prędkości elementów turbulentnych $\tau_{\text{con}} = \ell_{\text{con}}/v_{\text{con}}$. Korzystając ze wzoru (280) na v_{con} w wersji dla wydajnej konwekcji ($\zeta \rightarrow 0$), dostajemy

$$v_{\text{con}} = v_A^{2/3} [6v_T(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})]^{1/3}, \quad (359)$$

gdzie v_A , jak wynika z wyrażenia nad wzorem (274), jest rzędu prędkości dźwięku, v_a . Dla gazu doskonałego $v_A \approx 0.3\alpha_{\text{con}}v_a$. Z (274), używając $\ell_{\text{con}} = H_p\alpha_{\text{con}}$, dostajemy

$$v_T = \frac{\ell_{\text{con}} \nabla_{\text{rad}}}{\alpha_{\text{con}}^2 \tau_{\text{th},l}}, \quad \text{gdzie} \quad \tau_{\text{th},l} \equiv \frac{4\pi r^2 H_p \rho c_p T}{L_r},$$

jest lokalną skalą czasową chłodzenia warstwy o grubości H_p . Analogicznie, można zdefiniować lokalną dynamiczną skalę czasową jako czas przejścia dźwięku przez warstwę o grubości H_p , czyli $\tau_{d,l} = \frac{H_p}{v_a}$. Tak więc z (359) dostajemy

$$v_{\text{con}} = \left(\frac{0.5(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})}{\alpha_{\text{con}}^2 \nabla_{\text{rad}}} \right)^{1/3} \frac{\ell_{\text{con}}}{\tau_{d,l}^{2/3} \tau_{\text{th},l}^{1/3}}$$

i na skalę czasową mieszania przez konwekcję

$$\tau_{\text{con}} \sim \tau_{d,l}^{2/3} \tau_{\text{th},l}^{1/3}.$$

W głębokich wnętrzach gwiazdowych mamy

$$\frac{\tau_{\text{th},l}}{\tau_{\text{d},l}} \sim \frac{\tau_{\text{th}}}{\tau_{\text{d}}} \sim 10^k,$$

gdzie k zależy od parametrów gwiazdy, ale zawsze jest dużą liczbą. Dla Słońca, z ocen w rozdziale 12.1 wynika $k \approx 12$, a dla gwiazdy o masie $10M_{\odot}$ wynika wartość $k \approx 9$. Stąd

$$\tau_{\text{con}} \sim 10^{-2k/3} \tau_{\text{th},l}$$

i dlatego w modelowaniu ewolucji gwiazd prawie zawsze przyjmuje się, że produkty nukleosyntezy w jądrach konwektywnych ulegają natychmiastowemu mieszaniu.

Konwekcja jest najważniejszym zjawiskiem prowadzącym do mieszania pierwiastków, a do niedawna, jedynym uwzględnianym w kodach ewolucyjnych. Problemem jest określenie zasięgu mieszania. Standardowym postępowaniem jest utożsamianie masy mieszanego wnętrza, M_{mix} , z masą jądra konwektywnego M_{conv} , którą wyznacza warunek

$$D \equiv \nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} = 0.$$

W jądrach konwektywnych D jest wielkością malejącą z M_r . Często jednak dopuszcza się mieszania pierwiastków w pewnym obszarze poza granicą jądra konwektywnego $M_r = M_{\text{conv}}$ wyznaczoną przez warunek $\nabla_{\text{rad}} = \nabla_{\text{ad}}$. Ma to symulować efekt *przestrzeliwania* (*overshooting*) elementów turbulentnych. Nie potrafimy wyliczyć jego zasięgu. Zwyczajowo przyjmuje się na zasięg mieszania wielkość $d_{\text{ov}} = \alpha_{\text{ov}} H_p(M_{\text{conv}})$ i w rozmaity sposób wybiera wartość α_{ov} z przedziału $[0, 1]$.

Jeżeli w trakcie postępu ewolucji masa jądra konwektywnego maleje to, w standardowych modelach, równanie opisujące ewolucję chemiczną sprowadza się do

$$\frac{dX_i}{dt} = \begin{cases} C_{i,\text{nuc}} & \text{dla } M_r > M_{\text{mix}} \\ \frac{1}{M_{\text{mix}}} \int_0^{M_{\text{mix}}} C_{i,\text{nuc}} dM_r & \text{dla } M_r \leq M_{\text{mix}} \end{cases}, \quad (360)$$

gdzie $M_{\text{mix}} = M_{\text{conv}} + M_{\text{ov}}$. Zauważmy, że przy $d_{\text{ov}} \neq 0$ mamy nieciągłość X_i i ρ dla $M_r = M_{\text{mix}}$. Można tej nieciągłości uniknąć zakładając stopniowo malejące częściowe mieszanie.

Jeżeli, co ma miejsce w gwiazdach na ciągu głównym o masach w przedziale od ok. 1.1 do ok. $1.6M_{\odot}$ oraz w fazie palenia helu, jądro konwektywne ma tendencje do zwiększania masy, to na jego granicy powstaje skok obfitości pierwiastków. Jeżeli przy tym D maleje ze zmniejszaniem się obfitości spalanego pierwiastka, to na zewnątrz jądra występuje znów obszar niestabilny. Tak dzieje się w gwiazdach ciągu głównego. W takim obszarze, nazywanym *warstwą półkonwektywną*, zakłada się często częściowe mieszanie i wartości $X_i(M_r)$ wyznacza się z warunku neutralnej stabilności według kryterium Schwarzschilda (105),

$$\frac{dD}{dM_r} = 0,$$

prowadzącego do równania na pochodne obfitości postaci

$$\frac{dX_i}{dM_r} = f(\mathbf{y})$$

gdzie $f(\mathbf{y})$ jest znaną funkcją lokalnych parametrów, której jawną postać można uzyskać posługując się równaniami budowy gwiazd. Górną granicę warstwy półkonwektywnej wyznacza miejsce, w którym obfitość spalnego izotopu zrówna się z obfitością wynikającą z lokalnej wartości $C_{i,\text{nuc}}$.

Warstwy półkonwektywne wprowadza się też czasami w modelach gwiazd bardzo masywnych ($M \gtrsim 30M_\odot$) w obszarze chemicznie niejednorodnym na zewnątrz z jądra konwektywnym, gdy jest on niestabilny według kryterium Schwarzschilda, ale stabilny według kryterium Ledoux (103). Nie jest jasne czy takie postępowanie jest uzasadnione. W rozdziale 9.3 była mowa o tym, że wtedy niestabilność ma charakter wibracyjny. Prowadzi więc do wzbudzania fal, które nie muszą prowadzić nawet do częściowego mieszania materii, ale zawsze przenoszą część energii. Może więc dochodzić do redukcji gradientu temperatury bez mieszania pierwiastków. Stromy gradient μ może tworzyć nieprzenikalną barierę dla elementów gazu i dlatego rozpatrywane są też modele ze skokiem obfitości pierwiastków.

Trudności z opisem mieszania pierwiastków przez konwekcje występują też w fazie ewolucji na gałęzi czerwonych olbrzymów i na gałęzi asymptotycznej, kiedy rozwijająca się zewnętrzna warstwa konwektywna sięga do obszarów niejednorodnych chemicznie.

W gwiazdach szybko rotujących istotnym źródłem mieszania może być cyrkulacja południkowa oraz turbulencja związana z niestabilnością rotacji różniczkowej, o czym była mowa w poprzednim rozdziale.

Nasza niewiedza dotycząca mieszania produktów nukleosyntezy jest głównym źródłem niepewności modelowania ewolucji gwiazd. Dane obserwacyjne częściowo uzasadniają zaniedbanie zmian chemicznych w warstwach zewnętrznych. Skład chemiczny atmosfer większości gwiazd należących do jednej populacji jest podobny, niezależny od ich zaawansowania ewolucyjnego.

Istnieją jednak ważne wyjątki. Gwiazdy typu Ap i Am, które wykazują rozmaite anomalie w obfitościach pierwiastków. Tłumaczy się je efektami dyfuzji i selektywnego ciśnienia promieniowania. Atmosfery białych karłów, poza nielicznymi wyjątkami, są bądź czysto wodorowe (typ DA) bądź czysto helowe (typ DB). Dowodzi to efektywności baro-dyfuzji (grawitacyjnego osiadania) cięższych pierwiastków. Wydaje się, że ten efekt powinien działać w jakimś stopniu we wszystkich gwiazdach.

W chłodnych gwiazdach mieszanie pierwiastków w rozległych warstwach konwektywnych znacznie redukuje efektywność dyfuzji. Na przykład dla Słońca wartość Y w otoczce obniżyła się w ciągu 4.6 miliardów lat jego życia tylko o ok. 10%, od 0.275 do 0.25. O podobny procent obniżyła się względna obfitość cięższych pierwiastków. Brak widocznych efektów dyfuzji w atmosferach większości gwiazd o cienkich zewnętrznych warstwach konwektywnych tłumaczy się istnieniem powolnego mieszania związanego z efektami rotacji, przyjmując, że owo mieszanie jest wystarczające do zniesienia efektu baro-dyfuzji, ale nie

do wydobywania produktów nukleosyntezy z głębokiego wnętrza na powierzchnię gwiazdy.

Zmiany koncentracji wywołane dyfuzją opisane są przez dwa następujące równania

$$\mathcal{C}_{i,\text{dif}} = \frac{mA_i}{\rho} \left(\frac{dN_i}{dt} \right)_{\text{dif}} = -4\pi mA_i \frac{d(r^2 \mathcal{F}_{i,\text{dif}})}{dM_r}, \quad (361)$$

gdzie $\mathcal{F}_{i,\text{dif}}$ oznacza strumień dyfuzyjny dany jest wzorem

$$\mathcal{F}_{i,\text{dif}} = 4\pi r^2 \rho \left(-\mathcal{D}_{d,i} \frac{dX_i}{dM_r} + \mathcal{D}_{p,i} \frac{d \ln p}{dM_r} + \mathcal{D}_{T,i} \frac{d \ln T}{dM_r} \right) + \mathcal{F}_{i,\text{dif}}^{\text{rad}}. \quad (362)$$

Pierwsze trzy człony w tym wyrażeniu opisują efekty zwykłej dyfuzji molekularnej, baro- i termo-dyfuzji. Współczynniki $\mathcal{D}_{d,i}$, $\mathcal{D}_{p,i}$ i $\mathcal{D}_{T,i}$, w których uwzględnia się efekt pola elektrostatycznego wynikający z przesunięcia ku górze elektronów, wyraża się w funkcji lokalnych wartości ρ , T i X przez odpowiednie równania materiałowe. Zauważmy, że współczynnik $\mathcal{D}_{d,i}$ jest równy zwykłemu współczynnikowi dyfuzji molekularnej pomnożonemu przez czynnik zamiany N_i na X_i czyli przez ρ/mA_i . Baro- termo dyfuzja powoduje stopniowe przesuwanie się pierwiastków chemicznych o wyższej masie atomowej w kierunku centrum gwiazdy. Początkowo te procesy dominują. W stanie równowagi dyfuzyjnej osiaganej w białych karłach dochodzi do pełnej stratyfikacji pierwiastków, w której warstwy czysto-wodorowa, -helowa i -węglowa rozdzielone są cienkimi warstwami przejściowymi.

Ostatni człon opisuje efekt selektywnego ciśnienia promieniowania, które nie przekazuje pędu różnym jonom z równym prawdopodobieństwem. Więcej pędu odbierają te jony, które mają linie widmowe w częstotliwościach w pobliżu maksimum funkcji Plancka dla danej temperatury. Dlatego promieniowania przyspiesza selektywnie przede wszystkim właśnie te jony. Te następnie w zderzeniach tracą większość nadwyżki pędu, ale wypadkowy ruch ku powierzchni może zachodzić, jeśli ten efekt przeważa nad barodyfuzją i jeżeli szybkie makroskopowe mieszanie pierwiastków nie znosi obydwu efektów.

Przyspieszenie jonów o liczbie masowej A_i w wyniku absorpcji promieniowania dane jest przez

$$g_{\text{rad},i} = \frac{1}{A_i m c} \int_0^\infty \sigma_{\nu,i} \mathcal{F}_\nu d\nu, \quad (363)$$

gdzie $\sigma_{\nu,i}$ oznacza całkowity przekrój czynny na absorpcję promieniowania o częstotliwości ν przez jony i . Strumień dyfuzyjny wynikający z przyspieszenia promieniowaniem dany jest przez

$$\mathcal{F}_{i,\text{dif}}^{\text{rad}} = \frac{mA_i X_i \mathcal{D}_{d,i}}{kT} g_{\text{rad},i}. \quad (364)$$

Ponieważ zarówno \mathcal{F}_ν jak i $\sigma_{\nu,i}$ zależą od temperatury, a przez to od głębokości, ten efekt może prowadzić do zlokalizowanej akumulacji niektórych pierwiastków w atmosferze, a także w głębi gwiazdy. Przykładowo, w warstwie o temperaturze $T_5 \approx 2$ można spodziewać się zwiększonej obfitości żelaza, bo przejścia

związano-związane w jonach tego pierwiaska wnoszą tam dominujący wkład do nieprzezroczystości.

Uwzględnie wpływu selektywnego ciśnienia na rozkład pierwiastków stanowi dużą komplikację w modelowaniu ewolucji gwiazd. Robi się to dopiero od niedawna, a ma to ważne znaczenie dla interpretacji składu chemicznego atmosfer, a także pulsacji niektórych gwiazd.

13.1.3 Utrata masy

Ten efekt odgrywa pierwszorzędną rolę w ewolucji składników ciasnych układów podwójnych, ale ten temat jest poza zakresem mojego wykładu.

W ewolucji izolowanych gwiazd ciągu głównego, utrata masy jest istotnym czynnikiem tylko dla dużych ($M > 20M_{\odot}$) mas początkowych, przy których skala czasowa utraty masy,

$$t_{\text{m.l.}} = -\frac{dt}{d \ln M},$$

staje się porównywalna z τ_{nuc} . Przyczyną tak szybkiej utraty masy jest *wiatr* gwiazdowy napędzany promieniowaniem. Efektywność tego przekazu zależy od jasności i temperatury efektywnej, a więc silnie od masy na ciągu głównym, oraz od zawartości pierwiastków ciężkich, które posiadają dużo linii w zakresie ultrafioletu są pierwotnymi odbiorcami pędu od promieniowania. Oceny tempa utraty masy oparte na danych obserwacyjnych opisuje się w formie zależności od parametrów gwiazdowych, n.p. M , L i T_{eff} . Nieuwenhuijzen i de Jager (1990) znaleźli następujące empiryczne wyrażenie, nieźle opisujące obserwowane tempo utraty masy z gwiazd masywnych Galaktyki.

$$\frac{dM}{dt} \approx -10^{-14} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{0.16} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{1.42} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{0.81} M_{\odot}/\text{rok}. \quad (365)$$

Ten wzór używany jest w niektórych kodach do obliczeń ewolucji gwiazd populacji I. Z obliczeń Brassan i in. (1994) wynika, że gwiazdy populacji I o masach 30 i $60M_{\odot}$ tracą, odpowiednio 13 i 42% swojej początkowej masy. Tempo utraty masy rośnie z obfitością metali. W kodach przyjmowana jest zależność $\frac{dM}{dt} \propto \sqrt{Z}$.

Ta forma utraty odgrywa rolę jedynie w gorących gwiazdach bardzo o dużej jasności absolutnej. Wiatr typu słonecznego raczej nie prowadzi do znaczącej utraty masy. Dla Słońca tempo utraty masy spowodowane wiatrem wynosi $2 \times 10^{-14} M_{\odot}/\text{rok}$ i jest niższe od tempa utraty masy wynikającej z zamiany wodoru w hel.

Dla gwiazd pojedynczych o masach mniejszych niż $\sim 20M_{\odot}$ znacząca utrata masy występuje dopiero w fazie ewolucji wzdłuż gałęzi czerwonych olbrzymów i gałęzi asymptotycznej. Dla takich gwiazd bezpośrednim powodem utraty materii jest ciśnienie promieniowania działające na ziarna pyłu w atmosferach tych gwiazd. Tak więc i w tym przypadku, większa obfitość pierwiastków ciężkich prowadzi do szybszej utraty.

Tempo utraty masy czerwonych olbrzymów opisuje empiryczny wzór *Reimersa*

$$\frac{dM}{dt} = -4 \times 10^{-13} \eta \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right) M_{\odot}/\text{rok}, \quad (366)$$

w którym dopasowywany do danych współczynnik η znajduje się w przedziale (0.3,3). Nawet wyliczona z tą górną wartością, całkowita utracona masa w utracona w tej fazie nie przekracza 20%. Znacznie większe utrata masy ma miejsce na gałęzi asymptotycznej. W tej fazie gwiazda może stracić nawet 90% masy jaką miała na ciągu głównym.

13.2 Równania na strukturę modeli ewolucyjnych

Strukturę wewnętrzną modeli ewolucyjnych opisują równania (316-317) i (319) z rozdziału 11.2.1 i równanie (356). Warunki brzegowe zachowują postać daną równaniami (321), (322-324). Jedynie do ϵ_c występującym w równaniu (324) dodać trzeba wyraz z pochodnymi czasowymi, tak jak to zrobiliśmy w równaniu (356).

13.3 Warunki początkowe

Standardowym podejściem jest rozpoczynanie obliczeń ciągów ewolucyjnych od wieku zero (modele ZAMS). Wpływ wcześniejszych etapów ewolucji na strukturę gwiazd na ciągu głównym jest zanedbywalny, jeśli nie rozważamy efektów rotacji i pola magnetycznego. Skutki nukleosyntezy zachodzącej przed wiekiem zero są albo nieistotne dla struktury gwiazdy (n.p. reakcje Li+p, D+p) albo łatwe do uwzględnienia w modelach wieku zero, a później szybko zapominane (reakcje $^3\text{He} + ^3\text{He}$, $^{12}\text{C} + \text{p}$).

Modelowanie gwiazd znajdujących się w fazie przed ciągiem głównym ma samodzielne znaczenie. Dla takich ciągów modelami inicjującymi są modele całkowicie konwektywne.

13.4 Jednoznaczność rozwiązań równań ewolucji

Dla uproszczenia zakładamy niezmienną masę, ale to nie jest istotne dla ważności wniosku. Niech składowe wektora $\mathbf{y}(M_r, t)$ oznaczają kolejno r , ρ , L_r , T i obfitości tych pierwiastków, \mathbf{X} , których zmiany obfitości chcemy śledzić. Jeżeli znamy $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ w pewnej chwili $t = t_0$ i mamy wszystkie potrzebne dane materiałowe, to z pomocą równań (316), (317), (356), (319) i (357) możemy, w zasadzie, wyznaczyć \mathbf{y} w dowolnej chwili t . Przekonuje nas o tym następujące rozumowanie.

Oznaczmy przez Δt mały przyrost czasu od momentu t_0 , na tyle mały żeby wyrazy rzędu Δt^2 były zanedbywalne. Używamy równania (357) lub (360) do wyznaczenia przyrostów X_i wyliczając prawe strony w chwili t_0 . Znając wartości $\mathbf{y}_0 \equiv \mathbf{y}(t_0)$ mamy wszystkie potrzebne do tego dane. Mamy więc

$$\Delta X_i = C_i(t_0) \Delta t \quad (367)$$

i, podobnie jak w przy konstrukcji modeli równowagowych, funkcje $X_i(M_r)$ traktujemy jako znane.

Równania (316), (317), (356) i (319) zapisujemy w postaci

$$\mathcal{R}_j(\mathbf{y}) \equiv \frac{df_j(\mathbf{y})}{dM_r} + h_j(\mathbf{y}) = 0 \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (368)$$

Zauważmy, że dla $j \neq 2$ mamy po prostu $f_j = y_j$.

Z różnicowej wersji równania (356) dostajemy liniowy związek pomiędzy małymi przyrostami $\Delta\rho$ i ΔT ,

$$c_v \left[\Delta T - (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\rho} \Delta\rho \right] = \Delta t \left(\epsilon - \frac{dL_r}{dM_r} \right) - \sum_i \frac{\partial u}{\partial X_i} \Delta X_i, \quad (369)$$

w którym współczynniki i wielkości po prawej stronie równości są znane. Korzystamy z tego związku w zlinearyzowanej wersji równań (316) i (317), z których dostajemy układ równań liniowych, niejednorodnych na przyrosty $\Delta\rho$ i Δr .

Zadanie Proszę napisać jawną postać tego układu równań i dowieść, że ma zawsze rozwiązania, poza przypadkiem neutralnej stabilności dynamicznej.

Linearyzując równanie 319 znajdziemy wyrażenie przyrost strumienia, $\Delta L_{r,w}$ obszarach promienistych. Opisane postępowanie dowodzi istnienia rozwiązań równań ewolucji, ale nie prowadzi do stabilnego schematu obliczeń numerycznych.

13.5 Metoda Henyeya

Schemat różnicowy śledzenia ewolucji w czasie opisany powyżej nosi nazę *metody explicit*. W tej metodzie wszystkie pochodne wyliczane są na początku kroku czasowego. Tu przedstawiam oryginalną wersję metody Henyeya, w której ewolucja chemiczna traktowana jest metodą *explicit*. To oznacza, że nadal używamy wyrażenia (367). Natomiast ewolucja cieplna liczona jest metodą *implicit*, czyli, że w zamiast równania (369) stosować będziemy następującą reprezentację różnicową równania (356).

$$\overline{\frac{dL_r}{dM_r}} = \bar{\epsilon} - \overline{c_v T} \left[\frac{\Delta \ln T}{\Delta t} - (\Gamma_3 - 1) \frac{\Delta \ln \rho}{\Delta t} \right] - \sum_i \overline{\frac{\partial u}{\partial X_i}} \frac{\Delta X_i}{\Delta t}, \quad (370)$$

gdzie kreski nad symbolem oznaczają średnie arytmetyczne wartości na początku i końcu kroku czasowego Δt , który powinien być dostatecznie mały.

Tu, za oryginalną wersją metody Henyeya zaniedbamy utratę masy i przyjmujemy, że mamy przybliżoną wartość $\Delta \mathbf{y}$. Dla pierwszego modelu w ciągu startującym z ZAMSu przyjmuje się zwykle $\Delta \mathbf{y} = 0$, a w kolejnych modelach przyrosty wynikające z wartości $\Delta \mathbf{y}/\Delta t$ w poprzednim kroku czasowych. Dalej nie korzysta się już z założenia, że przyrosty $\Delta \mathbf{y}$ są małe, a tylko ich poprawki, $\delta \mathbf{y} \equiv \mathbf{z}$, które są zarazem poprawkami do \mathbf{y} Równania (300) linearyzuje się względem \mathbf{z} .

Schemat iteracyjnego wyznaczania poprawek \mathbf{z} pokazują dwa następujące równania

$$\mathcal{R}_j(\mathbf{y}_0 + \Delta_i \mathbf{y}) + \sum_k \left\{ \frac{d}{dM_r} \left[\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_i z_k \right] + \left(\frac{\partial h_j}{\partial y_k} \right)_i z_k \right\} = 0 \quad (371)$$

i

$$\Delta_{i+1} \mathbf{y} = \Delta_i \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad (372)$$

gdzie wskaźnik i numeruje kolejne iteracje. Kontynuuje się je tak długo, aż największa z liczb $|\mathbf{z}|$ nie stanie się mniejsza od przyjętej wartości. Metoda iteracji jest więc podobna do opisanej dla konstrukcji modelu na ZAMS, ale zamiast czterech iterowanych wielkości mamy $4 \times N$, gdzie N jest liczbą punktów węzłowych w modelu.

Różnicowa (w M_r) reprezentacja równań (371) prowadzi do następujących liniowych związków łączących wartości \mathbf{z} w sąsiednich punktach sieciowych.

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} + D_M \frac{\partial h_j}{\partial y_k} \right)_i^{n+1} z_k^{n+1} = \sum_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} - D_M \frac{\partial h_j}{\partial y_k} \right)_i^n z_k^n - D_M (\mathcal{R}_j^{n+1} + \mathcal{R}_j^n)_i,$$

gdzie wskaźniki górne numerują punkty sieciowe, a $D_M = (M_r^{n+1} - M_r^n)/2$. Po odwróceniu macierzy dostajemy

$$\mathbf{z}^{n+1} = \mathbf{A}^{n,n+1} \mathbf{z}^n + \mathbf{w}^{n,n+1}, \quad (373)$$

gdzie $\mathbf{A}^{n,n+1}$ jest znaną macierzą 4×4 , a $\mathbf{w}^{n,n+1}$ jest znanym wektorem. W sumie mamy $4 \times (N-1)$ równań na $4 \times N$ niewiadomych \mathbf{z}^n . Warunki brzegowe dostarczają brakujących czterech równań.

Warunki brzegowe zachowają tę samą postać co dla modeli równowagowych, jeżeli tylko do ϵ_c występującym w równaniu (324) dodamy wyraz z pochodnymi czasowymi, podobnie jak to zrobiliśmy w równaniu (369). Linearyzując równania (322-325), z dodaniem w (324) członu nierównowagowego,

$$-c_v \left[\frac{\Delta T}{\Delta t} - (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \right],$$

znajdziemy łatwo (tu opuszczam te mało interesujące obliczenia) macierz \mathbf{B}^1 o wymiarach 4×2 i wektor \mathbf{C}^1 w relacji

$$\mathbf{z}^1 = \mathbf{B}^1 \begin{pmatrix} \delta \rho_c \\ \delta T_c \end{pmatrix} + \mathbf{C}^1. \quad (374)$$

Korzystając następnie z równania (373), wyliczyć kolejne macierze \mathbf{B}^n i wektory \mathbf{C}^n , zdefiniowane następującym wzorem.

$$\mathbf{z}^n = \mathbf{B}^n \begin{pmatrix} \delta \rho_c \\ \delta T_c \end{pmatrix} + \mathbf{C}^n. \quad (375)$$

Zewnętrzny warunek brzegowy nakłada się w punkcie $n = N$, który zwykle nie pokrywa się z brzegiem gwiazdy. Strukturę *otoczki*, która obejmuje małą

część masy gwiazdy, można modelować korzystając z równowagowych równań wewnętrznej budowy (316-319) kładąc $L_r = L$. W otoczce nie zachodzą reakcje jądrowe, a mała energia w niej zawarta uzasadnia założenie równowagi cieplnej, nawet wtedy gdy ewolucja gwiazdy zachodzi w cieplnej skali czasowej, o czym była mowa w rozdziale 11.1.2.

Całkując te równania od powierzchni w głąb do $M_r = M_r^N$ dla przybliżonych wartości $L = L_r^N$ i T_{eff} , znajduje się wartości \mathbf{y}^N . Dodatkowe całkowania dla par $(L + \delta L, T_{\text{eff}})$ i $(L, T_{\text{eff}} + \delta T_{\text{eff}})$, pozwalają na liczbowe wyznaczenia pochodnych cząstkowych

$$\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial L}\right)^N \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial T_{\text{eff}}}\right)^N$$

i stąd macierzy \mathbf{D}^N o wymiarach 4×2 i w relacji

$$\mathbf{z}^N = \mathbf{D}^N \begin{pmatrix} \delta L \\ \delta T_{\text{eff}} \end{pmatrix}. \quad (376)$$

To równanie w połączeniu z (375) dla $n = N$ prowadzi do układu czterech równań liniowych niejednorodnych na $\delta \rho_c$, δT_c , δL i δT_{eff} . Po wyznaczeniu $\delta \rho_c$ i δT_c i poprawek do parametrów powierzchniowych, znajduje się wszystkie wartości $\delta \mathbf{y}(M_r^n) = \mathbf{z}^n$ korzystając ze związków (375) dla $n = 1$ do N .

Po zakończeniu iteracji mamy model gwiazdy w chwili t . Teraz wylicza się zmiany obfitości pierwiastków, ΔX_i , dla założonego kroku czasowego, Δt . Wybór wartości Δt zależy od tempa ewolucji. Czasami zmniejszenie Δt wymusza brak zbieżności iteracji.

13.6 Dodatki do oryginalnej metody Henyeya

Uwzględnianie dyfuzji i półkonwekcji wprowadza równania na pochodne przestrzenne X_i , $i = 1, \dots, I$, gdzie I oznacza liczbę pierwiastków, których zmiany obfitości chcemy śledzić. Można te równania dołączyć do równań (368) podwyższając liczbę niewiadomych, $\Delta \mathbf{y}$, związków (371) i warunków brzegowych do $4 + I$. Częstszym postępowaniem jest oddzielne traktowanie przyrostów ΔX_i . Iteracje mają wtedy przebieg dwustopniowy. W pierwszym kroku wyznacza się ΔX_i metodą explicit i tak jak poprzednio wyznacza iteracyjnie $\Delta \mathbf{y}$ i parametry brzegowe. W następnych krokach ΔX_i wyznacza się metodą implicit w oparciu o uzyskiwane w kolejnych iteracjach wartości $\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}$, aż do osiągnięcia wymaganej zbieżności.

Ubywanie masy opisuje się przeważnie metodą explicit, wpierw zachowując stałą wartość masy na zewnętrznym brzegu ($n = N$), a następnie przesuwając brzeg do niższych wartości masy.

Modelowanie ewolucji gwiazd z cienkimi warstwami produkcji energii jest utrudnione ze względu na ich szybkie przesuwanie się w masie. Wśród stosowanych rozwiązań jest przybliżenie stacjonarne dla tych warstw polegające na zaniedbaniu cząstkowej pochodnej po czasie w tych warstwach i włączanie ich do otoczki, co stanowi dobre przybliżenie w przypadku stabilności cieplnej. Dokładniejszym

i bardziej uniwersalnym rozwiązaniem jest korzystanie z asymetrycznych równań różnicowych, co umożliwia numeryczne śledzenie procesów zachodzących w drastycznie różnych skalach czasowych we wnętrzu jednej gwiazdy.