12 Modele gwiazd z uwzględnieniem rotacji

12.1 Struktura radialna

Jeżeli rotacja jest dostatecznie powolna to, jak pokazaliśmy w rozdziale 1.6, równania opisujące strukturę radialną separują się od równań opisujących dystorsję. Warunek równowagi mechanicznej w kierunku radialnym dany jest równaniem (40), któremu tu nadamy postać,

$$\frac{dp}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}(1 - q_{\rm rot}), \tag{340}$$

gdzie

$$q_{\rm rot} = \frac{2\Omega^2 r^3}{3GM_r}.$$

Wyprowadzając ten wzór założyliśmy, że prędkość kątowa rotacji nie zależy od miejsca w gwieździe, ale to nie jest konieczne założenie. Istotne jest tylko aby $\epsilon_{\rm rot} << 1$. Jeżeli Ω zależy nie tylko od r, ale też od $\mu = \cos\theta$, to we wzorze na $q_{\rm rot}$ należy zastąpić Ω^2 przez

$$\overline{\Omega^2} = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} \Omega^2(1 - \mu^2)d\mu.$$

Jest tylko jeszcze jedna modyfikacja równań na strukturę radialną (316-319): wzór na gradient promienisty ma teraz postać

$$\nabla_{rad} = \frac{3\kappa L_r p}{16\pi GacM_r(1 - q_{\rm rot})T^4}. \tag{341}$$

Tak zmodyfikowane równania używane są często w modelowaniu struktury, a także ewolucji gwiazd rotujących. Dla danej funkcji $\overline{\Omega^2}(M_r)$ całkowanie równań równowagi przebiega tak samo jak bez uwzględniania rotacji. Trudność stanowi wyznaczenie tej funkcji i jej zmian w trakcie ewolucji.

12.2 Prawo von Zeipela

W rozdziale 1.4 pokazaliśmy, że w przypadku rotacji cylindrycznej (w tym jednorodnej) w obszarze chemicznie jednorodnym wszystkie parametry termodynamiczne są stałe na powierzchniach całkowitego potencjału mechanicznego, Φ_T. Wniosek pozostaje ważny dla konfiguracji chemicznie niejednorodnych jeśli tylko składowe $\boldsymbol{X}$ są stałe na powierzchniach ekwipotencjalnych. Zatem także wielkości κ i ϵ są stałe na ta tych powierzchnich i strumień promieniowania (rów.245) można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{F}_{\rm rad} = \eta(\Phi_T)\boldsymbol{g}, \tag{342}$$

gdzie

$$\eta = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{d\Phi_T} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\nabla}\Phi_T.$$

W odróżnieniu od parametrów termodynamicznych, $g = |\mathbf{g}|$ (przyspieszenie odśrodkowe jest uwzględnione w $\boldsymbol{g}$) i $F_{\rm rad} = |\boldsymbol{F}_{\rm rad}|$ nie są stałe na powierzchniach ekwipotencjalnych. Na przykład w modelu Roche'a, stosunek przyspieszenia biegunowego do równikowego na powierzchni ekwipotencjalnej dany jest przez

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{(r_e/r_p)^2}{1-\epsilon_{{\rm rot},r}}, \quad \text{gdzie} \quad \epsilon_{\rm rot,r} = \frac{\Omega^2 r_e^3}{GM}$$

Skąd, po skorzystaniu z (29), znajdujemy

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{(1+0.5\epsilon_{{\rm rot},r})^2}{1-\epsilon_{{\rm rot},r}}.$$

Zadanie: Pokazać, że w przybliżeniu liniowym w $\epsilon_{{\rm rot},r}$, rozkład całkowitego przyspieszenia na odkształconej powierzchni gwiazdy dany jest wzorem

$$\frac{g-\bar{g}}{\bar{g}} = \left(\frac{4}{3}\epsilon_{{\rm rot},R} - J_2\right) P_2(\cos\theta), \quad \text{z} \quad \bar{g} \approx \frac{GM}{R^3}$$

Równanie (342) prowadzi do *prawa von Zeipel'a* dla rozkładu temperatury efektywnej na powierzchni niesferycznej gwiazdy.

$$T_{\rm eff} \propto F_{\rm rad}^{1/4} \propto g^{1/4}. \tag{343}$$

Stosuje się ono do gwiazd dostatecznie gorących, w których otoczkach strumień konwektywny można zaniedbać i dla wszystkich potencjalnych sił odkształcających, na przykład do gorących składników ciasnych układów podwójnych. Czasami używa sie terminu *pociemnienie grawitacyjne.* Gwiazda rotująca oglądana ze strony równika wygląda na obiekt o niższej temperaturze efektywnej i grawitacji niż oglądana ze strony bieguna.

W gwieździe niesferycznej na ogół nie udaje się spełnić warunku równowagi cieplnej w formie

$$\rho T\frac{dS}{dt} = \epsilon\rho - {\rm div}\boldsymbol{F} = 0. \tag{344}$$

Problem ten znany jest jako *paradoks von Zeipela.* Dostrzec go łatwo używając wyrażenia (342) na strumień w równaniu bilansu ciepła (244). Dostajemy wtedy

$$\rho T\frac{dS}{dt} = \epsilon\rho - \eta\boldsymbol{\nabla}^2\Phi_T - \frac{d\eta}{d\Phi_T}g^2. \tag{345}$$

Dla przypadku rotacji jednorodnej mamy z (2) i (24)

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi_T = 4\pi G\rho - 2\Omega^2. \tag{346}$$

Widzimy, że pierwszy i drugi wyraz lewej strony (345) są stałe na powierzchniach ewipotencjanych, ale nie dotyczy to ostatniego wyrazu. Poza szczególną sytuacją gdy $\frac{d\eta}{d\Phi_T} = 0$, nie można go skompensować tak, aby spełnić warunek równowagi cieplnej. W tej szczególnej sytuacji musielibyśmy mieć jednak zupełnie nierealistyczne prawo generacji energii, $\epsilon = 4\pi G - 2\Omega^2/\rho$. Stąd wniosek o niemożności spełnienia równania (344) w przypadku rotacji jednorodnej.

Zadanie: zbadać możliwość spełnienia warunku równowagi cieplnej w przypadku rotacji cylindrycznej, $\Omega = \Omega(s)$, gdzie s jest odległością od osi rotacji.

Brak równowagi cieplnej ma miejsce dla "prawie"wszystkich niesferycznych modeli gwiazd przy założonej sile odkształcającej. W przypadku małych odkształceń, rozpatrywanych w podrozddziale 1.6, wniosek ten wynika stąd, że nieradialne składowe zaburzeń p i ρ wyznaczone są przez warunek równowagi sił i nie ma już swobody dla spełnienia warunku równowagi cieplnej.

Jeżeli $\Omega(r,\theta)$ jest traktowana jako nieznana funkcja, to wtedy mamy potrzebną swobodę dla wprowadzenia warunku $dS/dt = 0$. Otrzymane w taki sposób prawa rotacji są jednak niestabilne.

12.3 Cyrkulacja południkowa

Konsekwencją nierównowagi cieplnej jest *cyrkulacja południkowa* inaczej *cyrkulacja Eddingtona-Vogta*. Przy założeniu stacjonarności, wzory na składowe pola prędkości cyrkulacji można uzyskać z równania (344) i z równania ciągłości (86). Dostajemy, odpowiednio,

$$\rho T \frac{dS}{d\Phi_T} v_{\mathrm{mc},n} g = \epsilon_{\mathrm{nuc}}\rho - \eta(4\pi G\rho - 2\Omega^2) - \frac{d\eta}{d\Phi_T} g^2 \qquad (347)$$

i

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}_{\mathrm{mc}}) = -\frac{d\ln\rho}{d\Phi_T} v_{\mathrm{mc},n} g, \qquad (348)$$

gdzie $v_{\mathrm{mc},n}$ oznacza składową normalną do powierzchni ekwipotencjalnej. Przekształcamy (347) korzystając ze związku

$$T\frac{dS}{d\Phi_T} = c_p T\left(\frac{d\ln T}{d\Phi_T} - \nabla_{\mathrm{ad}}\frac{d\ln p}{d\Phi_T}\right) = -\frac{c_p \rho T D}{p} = -\frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{D}{\nabla_{\mathrm{ad}}},$$

gdzie $D \equiv \nabla_{\mathrm{rad}} - \nabla_{\mathrm{ad}}$. Wielkość $\frac{d\eta}{d\Phi_T}$ eliminujemy wykorzystując warunek zachowania masy, $\overline{v_{\mathrm{mc},n}} = 0$, gdzie kreska na symbolem oznacza wartość średnią na powierzchni ekwipotencjalnej. W ten sposób dostajemy

$$\frac{d\eta}{d\Phi_T}\bar{g} = [\epsilon_{\mathrm{nuc}}\rho - \eta(4\pi G\rho - 2\Omega^2)]\overline{g^{-1}}$$

i ostatecznie

$$v_{\mathrm{mc},n} = -\frac{\chi_\rho}{\chi_T}\frac{\nabla_{\mathrm{ad}}}{D}\left[\eta\left(4\pi G - \frac{2\Omega^2}{\rho}\right) - \epsilon_{\mathrm{nuc}}\right]\left(\overline{g^{-1}}\frac{g}{\bar{g}} - g^{-1}\right). \qquad (349)$$

Jeśli siłę odśrodkową można traktować jako małe (liniowe) zaburzenie, to mamy

$$g \approx \bar{g} + \tilde{g}(r)P_2(\cos\theta), \quad \eta \approx \frac{L_r}{4\pi G M_r}, \quad v_{\mathrm{mc},n} \approx v_{\mathrm{mc},r}$$

i z (349) dostajemy łatwiej czytelny wzór

$$v_{\mathrm{mc},r} = \tilde{v}_{\mathrm{mc}}(r)P_2(\cos\theta), \qquad (350)$$

gdzie

$$\tilde{v}_{\rm mc} = -2\frac{\chi_\rho}{\chi_T}\frac{\nabla_{\rm ad}}{D}\left[\frac{L_r}{M_r}\left(1-\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right)-\epsilon_{\rm nuc}\right]\frac{\tilde{g}}{\bar{g}^2}. \tag{351}$$

W tym samym przybliżeniu z równania (348) dostajemy

$$v_{{\rm mc},\theta} = \frac{1}{3r\rho}\frac{d(\tilde{v}_{\rm mc}r^2\rho)}{dr}\frac{dP_2}{d\theta}. \tag{352}$$

Te wyrażenia są, w zasadzie, liniowe w Ω^2. Zachowany został jednak wyraz wyższego rzędu $\propto \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$, bo może być dominujący blisko powierzchni nawet dla wolnej rotacji. Zmiana znaku (zwrotu) cyrkulacji zachodzi przy

$$\rho = \frac{2}{3}\bar{\rho}\left(\frac{\Omega}{\Omega_{\rm max}}\right)^2$$

Najważniejszym zadawanym pytaniem było czy cyrkulacja południkowa może mieszać pierwiastki. Spodziewamy się mieszania produktów nukleosyntezy jeśli

$$\tau_{\rm mc} \equiv \int_{r_c}^{R}\frac{dr}{\tilde{v}_{\rm mc}} \sim \tau_{\rm nuc}. \tag{353}$$

Dla oszacowania $t_{\rm mc}$ można wykorzystać równanie (351), w którym zakładamy gaz doskonały, kładziemy

$$\tilde{g} \approx \frac{2\Omega^2 r}{3},$$

oraz zaniedbujemy wyraz wyższego rzędu w Ω, który ważny jest tylko blisko powierzchni gwiazdy. Mamy wtedy,

$$\tilde{v}_{\rm mc} \approx \frac{0.5}{\nabla_{\rm ad}-\nabla}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(\frac{M}{M_r}\right)^3\frac{r}{\tau_{\rm th}}\left(\frac{\Omega}{\Omega_{\rm max}}\right)^2.$$

Osobliwość na granicy obszarów konwektywnych jest niefizyczna, ale nieistotna dla oceny $t_{\rm mc}$.

Dla gwiazdy ciągu głównego o masie $M = 5M_\odot$, dla której $\tau_{\rm nuc} = 7.9\times10^7$ lat i $\tau_{\rm th} = 5.5\times10^5$ lat znajdujemy

$$\tau_{\rm mc} \approx 3\tau_{\rm th}\left(\frac{\Omega_{\rm max}}{\Omega}\right)^2.$$

Dla takiej gwiazdy $\Omega_{\rm max}$ odpowiada ok 500 km/s. Przy typowych prędkościach dla gwiazd górnego ciągu głównego $\sim 10^2$ km/s wpływ cyrkulacji na redystrybucję helu i wodoru powinien być istotny. Obserwacyjnym dowodem na mieszanie pierwiastków w wyniku cyrkulacji jest nadwyżka obfitości azotu powstająca w wyniku działania cyklu CNO. Taką nadwyżę wykrywa się w atmosferach szybko rotujących gwiazd ciągu głównego.

Przy ocenie efektywności transportu pierwiastków przez cyrkulację należy uwzględnić

(a) zwrotny efekt horyzontalnego gradientu μ. Wiadomo, że hamuje on cyrkulację

(a) zwrotny wpływ cyrkulacji na rotację gwiazdy.

12.4 Ewolucja rotacji

Równanie rządzące zmianami prędkości kątowej otrzymamy rozważając bilans momentu pędu $\mathcal{K} = \Omega r^2 \sin^2\theta$. Ogólnie możemy napisać

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \mathcal{T},$$

gdzie prawa strona reprezentuje parę sił na jednostkę masy. W przypadku symetrii osiowej źródłem tej siły może być lepkość turbulentna i molekularna lub pole magnetyczne. Korzystając ze związku pomiędzy różnymi pochodnymi czasowymi możemy napisać

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = r^2 \sin\theta^2 \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\vec{\nabla}\mathcal{K}.$$

W polu prędkości $\mathbf{v}$ wyodrębnimy $\mathbf{v}_{\rm evol}$ - składowe wynikające z ewolucyjnej kontrakcji lub ekspansji i składowe $\mathbf{v}_{\rm mc}$ Przyjmiemy, że $\Omega \ll \Omega_{\rm max}$ i że w przybliżeniu można zaniedbać odkształcenie gwiazdy. Łącząc wypisane tu wyrażenia dostajemy

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{\mathcal{T}}{r^2\sin^2\theta} - (v_{{\rm evol},r} + v_{{\rm mc},r})\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{2\Omega}{r}\right) - \frac{v_{{\rm mc},\theta}}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}. \tag{354}$$

W obszarach konwektywnych dominującą rolę odgrywa para sił $\mathcal{T}$ związana z transportem turbulentnym. Z obserwacji (głównie Słońca) wiemy, że w otoczkach konwektywnych występuje znacząca zależność $\Omega(\theta)$. Pole magnetyczne jest źródłem powierzchniowej pary sił prowadzącej do utraty globalnego momentu pędu w skali czasowej krótszej niż $t_{\rm nuc}$.

W obszarach promienistych efekty ewolucyjne i cyrkulacja południkowa prowadzą do rotacji niejednorodnej. Pole magnetyczne o znikomym natężeniu wystarcza do skompensowania tego efektu. Nie wiemy czy takie pola istnieje. Jeżeli nie istnieje, to modyfikowana przez pole prędkości rotacja jest niestabilna w skali $t_{\rm th}$. Lokalne kryterium stabilności rotacji dane jest warunkami *Goldreicha-Schuberta-Frickego*, które w obszarach jednorodnych chemicznie mają postać

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial(\Omega s^2)}{\partial s} > 0. \tag{355}$$

Jeśli te warunki nie są spełnione wzbudzana jest powolna turbulencja, która wpływa na zależność $\Omega(r,\theta)$. Na kształt tej zależności w warstawach leżących pod otoczką konwektywną wpływają fale grawitacyjne generowane w pobliżu jej dolnej granicy. Tym efektem interpretuje się w niedawnych pracach przebieg prędkości kątowej w promienistym wnętrzu Słońca.

Ewolucja rotacji należy do nierozwiązanych problemów fizyki gwiazd. Nie wiemy też jaki jest zasiąg mieszania w spowodowany cyrkulacją południkową i turbulencją generowaną w wyniku niestabilności rotacji. Dane oberwacyjne wskazują na to,że mieszanie jest przeważnie wystarczająco efektywne by znieść efekty osiadania grawitacyjnego i nie dość efektywne by mieszać produkty nukleosyntezy w znaczącym obszarze powyżej ich tworzenia.