

9 Całkowity strumień energii

9.1 Równanie bilansu ciepła dla wnętrz gwiazdowych

Dla wnętrz gwiazdowych, pierwsze prawo termodynamiki(107) można zapisać w następującej jawnej postaci

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \rho \frac{du}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \epsilon \rho - \text{div} \mathbf{F} \quad (244)$$

gdzie $\epsilon(\rho, T, \mathbf{X})$ oznacza liczone na jednostkę masy tempo produkcji energii, pomniejszonej o straty neutrinowe, na jednostkę masy. Wylizaniu tej wielkości poświęcony będzie następny rozdział. Wielkość \mathbf{F} obejmuje strumień energii niesionej przez promieniowanie i molekuly oraz ewentualnie strumień konwektywny. Jeżeli ten ostatni jest zaniedbywalny, to całkowity strumień energii w przybliżeniu dyfuzyjnym dany jest przez

$$\mathbf{F} = -\lambda \nabla T. \quad (245)$$

Współczynnik przewodnictwa, λ , dany jest wyrażeniem (równanie 168 rozdz. 6)

$$\lambda = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}.$$

W przypadku symetrii sferycznej całkowity strumień przenoszony przez promieniowanie i molekuly dany jest wzorem (172).

Warunek równowagi cieplnej oznacza równość $\text{div} \mathbf{F} = \epsilon \rho$. Dla sferycznych modeli gwiazd mamy stąd i z równania (8)

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon. \quad (246)$$

Jeżeli niestabilność konwektywna występuje, to kładziemy

$$L_r = L_{\text{rad},r} + L_{\text{con},r}. \quad (247)$$

Wyrażenia na strumień konwektywny, $L_{\text{con},r}$, podane zostaną w dalszych częściach tego rozdziału. Równania na pochodną temperatury zapiszemy w tradycyjnej postaci

$$\frac{dT}{dM_r} = \nabla \frac{T}{p} \frac{dp}{dM_r} = -\nabla \frac{GM_r T}{4\pi r^4 p}. \quad (248)$$

W drugiej równości skorzystaliśmy z równania (9). Jeżeli strumień konwektywny jest zaniedbywalny, to ze (172) wynika równość

$$\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa L_r p}{16\pi G a c M_r T^4}. \quad (249)$$

W obszarze konwektywnym zachodzą następujące nierówności

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla < \nabla_{\text{rad}}. \quad (250)$$

Pierwsza nierówność wynika z kryterium niestabilności (105), a druga z tego, że część energii przenoszona jest przez konwekcję.

Jeśli niestabilność konwektywna występuje w głębokim wnętrzu gwiazdy, to wysoka wydajność transportu konwektywnego uzasadnia przybliżenie $\nabla \approx \nabla_{\text{ad}}$. To samo przybliżenie jest stosowane w przypadku warstw niejednorodnych przy spełnieniu nierówności (104). Nie mamy wtedy niestabilności dynamicznej, ale, jak zobaczymy w podrozdziale 9.4, występuje inny rodzaj niestabilności, która jak się spodziewamy też prowadzi do $\nabla \approx \nabla_{\text{ad}}$.

Równania (8-9) i (198-199) to *równania wewnętrznej budowy gwiazd*. Przy danej masie gwiazdy i danym rozkładzie obfitości pierwiastków, $\mathbf{X}(M_r)$, rozwiązania opisują model gwiazdy sferycznej znajdującej się w równowadze mechanicznej i cieplnej. Znamy więc L i R , oraz r, T, ρ, L_r w funkcji M_r . Z praktyczną metodą konstrukcji modeli równowagowych zapoznamy się później.

9.2 Strumień konwektywny

W warstwach niestabilnych względem konwekcji należy uwzględnić makroskopowy strumień energii. Dla wyliczenia tego strumienia rozważamy zmiany energii elementu objętości, \mathcal{V} w stałym zewnętrznym polu grawitacyjnym o potencjale Φ .

$$\frac{\partial E_{\mathcal{V}}}{\partial t} = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + u \right) + \rho \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]. \quad (251)$$

Równanie Eulera (81), po skorzystaniu z równości

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

zapisujemy w postaci

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p + \rho \nabla \Phi = 0, \quad (252)$$

i mnożymy skalarnie przez \mathbf{v} , skąd dostajemy

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi \right) - \mathbf{v} \cdot \nabla p.$$

Z równania (244) mamy

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla u + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) + \epsilon \rho - \text{div} \mathbf{F}.$$

Używając tych dwóch ostatnich wyrażeń i równania ciągłości (82) w (251), dostajemy

$$\frac{\partial E_{\mathcal{V}}}{\partial t} = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \left\{ \epsilon \rho - \text{div} \left[\mathbf{F} + \rho \mathbf{v} \left(\tilde{h} + \frac{v^2}{2} + \Phi \right) \right] \right\},$$

gdzie

$$\tilde{h} = u + \frac{p}{\rho}$$

jest entalpią jednostki masy. Wynika stąd, że strumień energii przenoszony przez ruch makroskopowy dany jest przez

$$\mathbf{F}_{\text{con}} = \rho \mathbf{v} \left(\tilde{h} + \frac{v^2}{2} + \Phi \right). \quad (253)$$

W stanie statystycznie stacjonarnym o symetrii sferycznej, mamy

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \rho v_r = 0 \quad (254)$$

i

$$L_{\text{con},r} = r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \rho v_r \left(\tilde{h} + \frac{v^2}{2} \right) = 4\pi r^2 \overline{\rho v_r \left(\tilde{h} + \frac{v^2}{2} \right)}. \quad (255)$$

Wyliczenie występującej tu wartości średniej jest trudne. Prosta procedura stosowana w modelowaniu gwiazd będzie opisana w podrozdziale 9.4. Jest ona oparta na teorii zaburzeń, którą zajmiemy się teraz.

9.3 Niestabilności przy zaburzeniach nieadiabatycznych

Przyjmujemy tu te same przybliżenia co w rozdziale 4, z tym, że w miejsce warunku adiabaticzności (88), korzystamy ze zlinearyzowanych równań (244) i (245), odpowiednio,

$$\rho T \frac{d\delta S}{dt} = \delta(\epsilon \rho - \text{div} \mathbf{F}) = \epsilon' \rho + \epsilon \rho' - \text{div} \mathbf{F}' \quad (256)$$

i

$$\mathbf{F}' = -\lambda' \nabla T - \lambda \nabla T'. \quad (257)$$

Potrzebne będzie jeszcze zlinearyzowane równanie stanu. W obszarach chemicznie niejednorodnych zakładamy $\delta\mu = 0$, bo zaniedbujemy zmiany obfitości w zaburzonym elemencie gazu. Stąd mamy

$$\mu' = -\delta r \frac{d\mu}{dr}.$$

Z tym związkiem zlinearyzowane równanie stanu przyjmuje postać

$$\frac{p'}{p} = \left[\chi_T \frac{T'}{T} + \chi_\rho \frac{\rho'}{\rho} - \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \mu} \right)_{\rho,T} \frac{d \ln \mu}{dr} \delta r \right]. \quad (258)$$

Z (245), uwzględniając tylko wiodące człony w \mathbf{k} , dostajemy z następujące wyrażenie na zaburzenie strumienia energii

$$\mathbf{F}' = -i\mathbf{k} \lambda T'. \quad (259)$$

Podstawiamy to wyrażenie do (244) i znów zachowując tylko wiodące człony w \mathbf{k} , dostajemy

$$\rho \delta S = -\frac{|\mathbf{k}|^2}{\gamma} \lambda \frac{T'}{T}, \quad (260)$$

gdzie oznaczyliśmy $\gamma \equiv -i\omega$. Tak więc $\Re(\gamma) > 0$ oznacza tempo narastania niestabilności.

Teraz, tak jak w rozdziale 4 wyrazimy zaburzenia wielkości termodynamicznych przez δr i podstawimy do (93) dla uzyskania relacji dyspersyjnej. Wzory (86) i (94) pozostają niezmienione. Mamy z nich, kolejno,

$$i\mathbf{k}_H \cdot \delta \mathbf{x} + ik_r \delta r = -\frac{\rho'}{\rho} \quad \text{i} \quad \frac{p'}{p} = -\frac{i\mathbf{k}_H \cdot \delta \mathbf{x} \omega^2 \rho}{|\mathbf{k}_H|^2 p}.$$

Zakładamy $|\omega| = |\gamma| \ll |\mathbf{k}_H| v_a$ i dostajemy

$$\frac{p'}{p} = -\left(ik_r \delta r + \frac{\rho'}{\rho}\right) \frac{\gamma^2 \Gamma_1}{|\mathbf{k}_H|^2 v_a^2} \quad (261)$$

Zauważmy, że wynika stąd

$$\left|\frac{p'}{p}\right| \ll \left|\frac{\rho'}{\rho}\right| \sim \left|\frac{T'}{T}\right|. \quad (262)$$

Skorzystamy z tej silnej nierówności przy wyliczaniu zaburzeń pozostałych parametrów termodynamicznych.

Traktujemy entropię jako funkcję temperatury i ciśnienia. Wtedy korzystając ze wzorów podanych w rozdziale 5.1 (definicje (111) i (112) oraz wzór (115) na c_p), dostajemy

$$\rho T \delta S = \frac{p\chi}{\nabla_{\text{ad}}} \left(\frac{\delta T}{T} - \nabla_{\text{ad}} \frac{\delta p}{p} \right),$$

gdzie oznaczyliśmy $\chi \equiv \chi_T / \chi_\rho$. Dalej, na mocy nierówności (262), mamy

$$\rho T \delta s = \frac{p\chi}{\nabla_{\text{ad}}} \left[\frac{T'}{T} + \delta r \frac{d \ln p}{dr} (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \right]$$

Używając tu wyrażenia (260) na δS , dostajemy

$$\frac{T'}{T} = \frac{(\nabla - \nabla_{\text{ad}})}{1 + |\mathbf{k}|^2 Q / \gamma} \frac{V \delta r}{r}, \quad (263)$$

gdzie

$$Q \equiv \lambda \frac{\nabla_{\text{ad}} T}{\chi p} = \frac{\lambda}{c_p \rho}, \quad V \equiv -\frac{d \ln p}{d \ln r}.$$

Zauważmy, że wielkość $|\mathbf{k}|^2 Q$ ma wymiar 1/sek i wyznacza względne tempo lokalnych strat energii.

Z (258), po zaniechaniu p'/p i skorzystaniu z równości

$$\frac{1}{\chi_\rho} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \mu} \right)_{\rho, T} = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{p, T},$$

mamy

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\chi \frac{T'}{T} + A_\mu \frac{\delta r}{r}$$

gdzie

$$A_\mu \equiv - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{p, T} \frac{d \ln \mu}{d \ln r}.$$

Za T'/T podstawiamy wyrażenie (263) i używamy z tożsamości

$$\chi_\rho^{-1} - \chi \nabla_{\text{ad}} = \Gamma_1^{-1},$$

by dostać

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{A + A_\mu k^2 Q / \gamma}{1 + |\mathbf{k}|^2 Q / \gamma} \frac{\delta r}{r}, \quad (264)$$

gdzie, podobnie jak w rozdziale 4, oznaczyliśmy

$$\chi V(\nabla_{\text{ad}} - \nabla) + A_\mu = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{d \ln r} - \frac{d \ln \rho}{d \ln r} \equiv A.$$

Teraz do równania (93) przedstawiamy wiodący człon wyrażenia (261) na p' ,

$$\frac{p'}{p} = -i k_r \frac{\gamma^2 \Gamma_1}{|\mathbf{k}_H|^2 v_a^2} \delta r \quad (265)$$

i wyrażenie (264) na ρ' . Po prostych przekształceniach dostajemy, jako warunek niezerowych rozwiązań na δr , następującą relację dyspersyjną

$$W(\gamma) \equiv \gamma^3 + \gamma^2 |\mathbf{k}|^2 Q + \gamma \frac{|\mathbf{k}_H|^2}{|\mathbf{k}|^2} A \frac{g}{r} + |\mathbf{k}_H|^2 A_\mu Q \frac{g}{r} = 0 \quad (266)$$

Rozpatrzmy wpieryw przypadek warstwy chemicznie jednorodnej ($A_\mu \equiv 0$). Pierwiastek z $\Re(\gamma) > 0$ istnieje, jeśli $A < 0$, co w tym przypadku jest równoważne $\nabla > \nabla_{\text{ad}}$. Widzimy więc, że straty energii nie wpływają na kryterium stabilności, a jedynie na tempo wzrostu amplitudy, które dane jest przez

$$\gamma = \gamma_{\text{ad}}(\sqrt{1 + q^2} - q), \quad (267)$$

gdzie

$$\gamma_{\text{ad}} = \sqrt{\frac{-gA}{r}} \frac{|\mathbf{k}_H|}{|\mathbf{k}|}$$

i

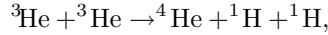
$$q = \frac{|\mathbf{k}|^2 Q}{2\gamma_{\text{ad}}}.$$

Inaczej jest w przypadku warstwy chemicznie niejednorodnej. Równanie (266) jest sześciennie. Z *twierdzenia Liéparda Chiparda* wynika, że dla niestabilności ($\Re(\gamma) > 0$) wystarcza spełnienie jednej z nierówności

$$A_\mu < 0, \quad A < 0, \quad \nabla > \nabla_{\text{ad}}. \quad (268)$$

Niespełnienie żadnej oznacza stabilność struktury względem małych zaburzeń nieradialnych.

Pierwsza z tych nierówności oznacza, że średni ciężar rośnie w głąb gwiazd. Taka sytuacja powstaje w warstwie, w której zachodzi reakcja



powodująca zwiększanie liczby cząstek w jednostce objętości. Typowo jednak, podobnie jak dyfuzja, reakcje jądrowe prowadzą do zmniejszania tej liczby. Odwrócenie gradientu μ może też zdarzyć się w wyniku akrecji materii. Wywołana tym niestabilność powoduje wymieszanie pierwiastków w czasie proporcjonalnym do Q^{-1} . Jest to *niestabilność cieplna*, związana z zaburzeniami entropii nie wpływającymi na równowagę mechaniczną gwiazdy.

W niestabilności dynamicznej, zachodzącej przy $A < 0$, istotne jest zaburzenie równowagi mechanicznej, a nie entropii.

Jeżeli spełniony jest tylko ostatni z warunków (268), to mamy do czynienia z niestabilnością wibracyjną, czyli oscylacjami o narastającej amplitudzie. W tym przypadku istotne jest zaburzenie i równowagi mechanicznej i entropii.

Przy zaniedbaniu wyrazów wyższego rzędu w Q , dostajemy z (266)

$$\gamma = \pm i \sqrt{\frac{gA}{r}} \left(\frac{k_H}{k} \right) + \frac{Qk^2}{2} \frac{V\chi(\nabla - \nabla_{\text{ad}})}{A}. \quad (269)$$

Ten sam typ niestabilności odpowiedzialny jest za wzbudzenie pulsacji gwiazd. Źródłem energii pulsacji jest dodatkowy strumień promieniowania pochłaniany przez zaburzony element gazu w fazie gdy jego temperatura jest wyższa od średniej ($\delta T > 0$), a oddawany gdy jest niższa ($\delta T < 0$). Łatwo się przekonać, że tak jest w rozważanym tu przypadku gdy $\nabla > \nabla_{\text{ad}}$. Wtedy bowiem, z równania (260) wynika, że T' , i stąd $\text{div} \mathbf{F}'$, ma ten sam znak co δr , a

$$\delta T = T' - T \nabla V \frac{\delta r}{r} = -T \frac{(\nabla |\mathbf{k}|^2 Q / \gamma) + \nabla_{\text{ad}}}{1 + |\mathbf{k}|^2 Q / \gamma} \frac{V \delta r}{r}$$

ma znak przeciwny. Konsekwencje wibracyjnej nie są łatwe do przewidzenia. Niestabilność taka prowadzi zawsze do transportu energii, ale nie wiadomo czy także do mieszania pierwiastków.

9.4 Zaburzenie o niewielkiej grubości optycznej

Wyrażenie (259) nie stosuje się, jeżeli grubość optyczna oscinka o długości $1/|\mathbf{k}|$ nie jest dużo większa od jedności, co oznacza, że nie jest spełniony warunek

$\kappa\rho \gg |\mathbf{k}|$. Dla takich krótkofalowych zaburzeń trzeba, w zasadzie rozwiązywać trójwymiatowe równanie transferu, co jest trudne i dlatego często stosuje się *nierównowagowe przybliżenie Eddingtona*. Przyjmuje się model atmosfery szarej i równanie opisujące szybkość przyrostu jednostki objętości gazu zapisuje się w postaci (por.rów.186)

$$\rho T \frac{dS}{dt} = 4\pi\kappa\rho(J - B) = -\text{div}\mathbf{F}. \quad (244a)$$

Równanie wiążące strumień ze średnią intensywnością promieniowania przyjmuje się w postaci

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi}{3\kappa\rho} \nabla J, \quad (244b)$$

która daje poprawne wyrażenie na strumień dla $\kappa\rho \gg |\mathbf{k}|$ i dla $\kappa\rho \ll |\mathbf{k}|$. Teraz w miejsce (259) mamy

$$\mathbf{F}' = -i\mathbf{k} \frac{4\pi}{3\kappa\rho} J' \quad (259a)$$

z

$$J' = B' + \frac{\gamma T \delta s}{4\pi\kappa}.$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do zaburzonego równania (244), dostajemy

$$\gamma T \delta S = -\frac{4\pi|\mathbf{k}|^2}{3\kappa\rho} \left(B' + \frac{\gamma T}{4\pi\kappa\rho} \delta S \right),$$

a stąd, kładąc

$$B' = \frac{acT^3}{\pi} T',$$

ostatecznie dostajemy

$$\rho \delta S = -\frac{|\mathbf{k}|^2}{\gamma(1+v)} \lambda \frac{T'}{T} \quad (260a),$$

gdzie

$$v \equiv \frac{|\mathbf{k}|^2}{3(\kappa\rho)^2}.$$

Gdy długość fali staje się znacznie, krótsza od drogi swobodnej fotonu, zaburzone tempo chłodzenia (grzania) nie zależy już od długości fali. Modyfikacja wzorów (263-264) na zaburzenie parametrów termodynamicznych sprowadza się do zastąpienia w nich

$$Q \rightarrow \frac{Q}{1+v}.$$

W wyrażeniu (267) na tempo wzrostu amplitudy (267) zmiana sprowadza się do podzielenia q przez czynnik $1+v$.

W następnym rozdziale oprzemy się na związkach liniowych otrzymanych w przybliżeniu dyfuzyjnym, ale wywód nie wiele by się zmienił gdybyśmy użyli przybliżenia Eddingtona.

9.5 Teoria drogi mieszania

Dokładne wyliczenie konwektywnego strumienia $L_{\text{con},r}$ według wzoru (255) wymaga modelowania numerycznego rozwiniętej konwekcji. W następnym podrozdziale przedstawiam odpowiednie równania i krótki opis procedury ich rozwiązywania. W stosowanej dotąd powszechnie praktyce do opisu transportu konwektywnego w otoczkach gwiazd używa się prostego modelu fizycznego znanego jako *teoria drogi mieszania*. Teorię tę stosuje się tylko do chemicznie jednorodnych otoczek gwiazdowych. Zakłada się więc $A_\mu \equiv 0$.

Istnieją różne warianty teorii drogi mieszania. Ich wspólną cechą jest założenie, że energia przenoszona jest przez identyczne turbulentne elementy konwektywne, które przebiegają pewien charakterystyczny dystans, ℓ_{con} , zwany drogą mieszania, po czym rozpływają się. Zwyczajowo parametryzuje się ten dystans współczynnikiem α_{con} we wzorze

$$\ell_{\text{con}} = \alpha_{\text{con}} H_p. \quad (270)$$

Można oczekiwać, że rozmiar elementów największych, odpowiedzialnych za transport energii, jest tego rzędu co ℓ_{con} . Istnienie takiego związku wynika z oceny efektów nieliniowych ograniczających prędkości konwektywne. Tym ograniczeniem jest przepływ energii do elementów coraz mniejszych (*kaskada turbulentna*) i w końcu do dyssypacji w wyniku lepkości. Żeby to zobaczyć zapisujemy równanie Eulera (88) w postaci

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \gamma^2 \delta \mathbf{x} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Zapis ten oznacza, że wszystkie siły działające na element wyliczane są w przybliżeniu liniowym w $\delta \mathbf{x}$ oprócz ostatniego członu, który odpowiada za kaskadę. W statystycznej izotropowej równowadze powinniśmy mieć więc

$$\gamma^2 |\delta \mathbf{x}| = |(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| = |(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v}| \approx k v_{\text{con}}^2, \quad (271)$$

gdzie v_{con} oznacza typową prędkość największych elementów. Dla typowego elementu kładziemy $\delta x_{\text{con}} \equiv |\delta \mathbf{x}| = \ell_{\text{con}}/2$ i przyjmujemy liniowy związek pomiędzy v_{con} i δx_{con} ,

$$v_{\text{con}} = \gamma \delta x_{\text{con}} = \gamma \frac{\ell_{\text{con}}}{2}. \quad (272)$$

Stąd $k = 2/\ell_{\text{con}}$.

Wyliczmy teraz v_{con} wykorzystując wzór (267) na γ , w którym parametry modelowe, takie jak q i A , są wielkościami średnimi dla danej wartości r . Zakładamy, że turbulencja jest izotropowa ($k_H^2 = 2k^2/3$) i w ten sposób dostajemy

$$v_{\text{con}} = \sqrt{v_A^2 \nabla_n + v_T^2} - v_T, \quad (273)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\nabla_n \equiv \nabla - \nabla_{\text{ad}},$$

$$v_A^2 \equiv \frac{\chi \alpha_{\text{con}}^2}{6} \frac{p}{\rho}$$

i

$$v_T \equiv \frac{Q}{\ell_{\text{con}}} = \frac{\lambda}{c_p \rho \ell_{\text{con}}} = \frac{L_r}{4\pi r^2 \rho c_p T \nabla_{\text{rad}} \alpha_{\text{con}}}. \quad (274)$$

W ostatnim wyrażeniu ∇_{rad} oznacza gradient temperatury, jaki istniałby w obszarze niestabilnym przy $L_{\text{conv},r} = 0$. Wielkościami do wyznaczenia w funkcji średnich wartości parametrów lokalnych (T , ρ , ∇_{rad} e.c.t.) są ∇_n (*gradient nadadiabatyczny*) i v_{con} (średnia wartość prędkości elementów konwektywnych). Wolny parametr α_{con} zwykle przyjmuje się w granicach od 1 do 2. Widzimy więc, że v_A jest od ok. 1.5 do 3 razy mniejsza od prędkości dźwięku. Wielkość ℓ_{con}/v_T daje ocenę czasu potrzebnego do osiągnięcia równowagi cieplnej przez sferyczną warstwę o grubości ℓ_{con} położoną w odległości r od centrum gwiazdy. Iloraz v_A/v_T rośnie szybko w głąb gwiazdy. Na dnie warstwy konwektywnej Słońca wynosi $3 \times 10^{-10} \alpha_{\text{con}}$.

Dla wyznaczenia ∇_n i v_{con} potrzebny jest dodatkowy związek. Znajdziemy go rozważając całkowity strumień energii. Zaczynamy od wyliczenia strumienia energii przenoszonego przez konwekcję. Mamy na ten strumień wzór (255), który przepisujemy w postaci

$$L_{\text{con},r} = 4\pi r^2 \overline{\left(\tilde{h} + \tilde{h}' + \frac{v^2}{2} \right)} (\rho + \rho') v_r.$$

W tym wzorze wielkości primowane traktujemy jako małe odchylenie parametrów od wartości średnich. Odchylenia i v_{con} zależą od czasu i od położenia na sferze. Zauważamy, że v^2 jest wielkością drugiego rzędu i że możemy przyjąć $\tilde{h}' = c_p T'$, bo wkład od odchylenia ciśnienia jest mały. Mamy też (rów. 254) $(\rho + \rho') v_r = 0$, bo rozważamy stan stacjonarny. W najniższym rzędzie w wielkościach fluktuujących, dostajemy

$$L_{\text{con},r} = \frac{4}{\sqrt{3}} \pi r^2 \rho c_p T \overline{\left(v_{\text{con}} \frac{T'}{T} \right)}. \quad (275)$$

Na mocy założonej izotropii położyliśmy $v_r = v_{\text{con}}/\sqrt{3}$. Podobnie jako średnie radialne przemieszczenie elementu należy przyjąć $\delta r = \ell_{\text{con}}/2\sqrt{3}$. W teorii drogi mieszania mamy symetrię pomiędzy ruchem elementów w górę i w dół. Zmienia się tylko jednocześnie znak v_r i T' . Koncentrujemy uwagę na elementach poruszających się w górę. Korzystamy ze wzoru (263) na T' , w którym zastępujemy $k^2 Q \gamma$ i $V \delta r/r$, odpowiednio, przez $2v_T/v_{\text{con}}$ i $\alpha_{\text{con}}/2\sqrt{3}$. Stąd

$$\frac{T'}{T} \approx \frac{\nabla_n v_{\text{con}}}{v_{\text{con}} + 2v_T} \frac{\alpha_{\text{con}}}{2\sqrt{3}}. \quad (276)$$

Podstawiamy to do (275) i z wykorzystaniem wyrażenia (274) na v_T , dostajemy

$$L_{\text{con},r} = \frac{L_r}{6 \nabla_{\text{rad}}} \frac{\nabla_n v_{\text{con}}^2}{v_T (v_{\text{con}} + 2v_T)}. \quad (277)$$

Mamy

$$L_r = L_{\text{rad},r} + L_{\text{con},r}$$

i

$$\frac{L_{\text{rad},r}}{L_r} = \frac{\nabla}{\nabla_{\text{rad}}} = \frac{\nabla_{\text{ad}} + \nabla_n}{\nabla_{\text{rad}}}, \quad (278)$$

co wynika z definicji L_{rad} i ∇_n . Z tymi dwiema równościami, dostajemy z (277) poszukiwany dodatkowy związek pomiędzy v_{con} i ∇_n ,

$$\nabla_n \left(1 + \frac{v_{\text{con}}^2}{6v_T(v_{\text{con}} + 2v_T)} \right) = \nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}. \quad (279)$$

Układ równań (273) i (279) można sprowadzić do równania sześciennego na v_{con} . *Zadanie* Proszę:

- (i) wyprowadzić to równanie,
- (ii) pokazać, że ma zawsze tylko jeden rzeczywisty pierwiatek i że jest on zawsze dodatni
- (iii) pokazać, że dla

$$\zeta \equiv \frac{v_T}{v_A} \rightarrow 0$$

$$v_{\text{con}} \rightarrow v_A [6\zeta(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})]^{1/3} \quad (280)$$

$$\nabla \rightarrow \nabla_{\text{ad}} + [6\zeta(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})]^{2/3}, \quad (281)$$

(iv) a dla $\zeta \rightarrow \infty$

$$v_{\text{con}} \rightarrow \frac{v_A}{2\zeta} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}) \quad (282)$$

$$\nabla \rightarrow \nabla_{\text{rad}} - \frac{(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})^3}{48\zeta^4} \quad (283)$$

Widzimy, że w obydwu granicach, z odmiennych powodów, prędkości konwektywne są znacząco poddźwiękowe. W gwiazdach ciągu głównego, poza cienką warstwą podpowierzchniową, mamy $\zeta \ll 1$, $v_{\text{con}} \ll v_A$ i $\nabla \approx \nabla_{\text{ad}}$. W czerwonych olbrzymach warstwa istotnie nadadiabatyczna może być rozległa, ale zawsze struktura głębokiej części warstwy konwektywnej jest w dobrym przybliżeniu adiabatyczna.

Dla wszystkich gwiazd chłodnych wybór wartości α_{con} ma duży wpływ na ich modele i wartości parametrów zewnętrznych w funkcji masy. Dopasowanie modelu Słońca wymaga dobrania konkretnej wartości $\alpha_{\text{con}} \approx 1.7$. Nie można jednak traktować tego parametru jako stałej uniwersalnej. Przyjęcie większej wartości oznacza bardziej wydajny transport energii i większą grubość otoczki konwektywnej. Należy pamiętać, że niektóre wzory, a zwłaszcza (271) oparte są na bardzo przybliżonych oszacowaniach. Teoria drogi mieszania jest powszechnie używana w kodach do obliczeń ewolucji gwiazd, ale dla wielu zastosowań potrzebne są trójwymiarowe symulacje hydrodynamiczne.

9.6 Symulacje hydrodynamiczne

Trójwymiarowe symulacje konwekcji w otoczkach gwiazd z realistycznym opisem fizyki mikroskopowej już od kilkunastu lat. Numerycznie śledzi się ruch gazu się opisany następującymi równaniami.

- Równanie Naviera-Stoksa

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p + \rho \nabla \Phi + \nabla \cdot \Theta = 0,$$

które różni się od (252) ostatnim członem opisującym lepkość turbulentną. Zapisujemy go, we współrzędnych kartezjańskich, w takiej samej postaci co lepkość molekularną,

$$\Theta_{jk} = \eta_{\text{tur}} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v} \right).$$

Ten człon odpowiada za przepływ pędu do małych elementów turbulentnych, których nie można opisać numerycznie ze względu na wielkość molekularnej liczby Reynoldsa dla gazu. Współczynnik turbulentnej lepkości dynamicznej dobiera się w wyniku kompromisu pomiędzy dokładnością i ekonomią. Im mniejsza, tym lepsza dokładność, ale większe wymagania obliczeniowe.

- Równanie ciepła

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\text{div}(\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{tur}}) + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \Theta_{jk}.$$

Strumień przenoszony przez promieniowanie, F , wylicza się z różnym stopniem wyrażniowania w zależności od potrzeb. Jeżeli celem jest modelowanie widm gwiazdowych, potrzebne jest jednoczesne rozwiązywanie w trzech wymiarach przestrzennych, dla trzech kierunków i wąskich przedziałów częstotliwości. Jeżeli interesuje nas głównie globalny transport energii i dynamika, to uważa się z wystarczające przybliżenie dyfuzyjne w głębokim wnętrzu i nierównowagowe przybliżenie Eddingtona dla warstw zewnętrznych. Strumień turbulentny, $\mathbf{F}_{\text{tur}} \sim \eta_{\text{tur}} \nabla s$, opisuje energię przenoszoną przez małe elementy turbulentne. Ostatni człon, w którym sumuje się po obydwu wskaźnikach, opisuje przyrost energii wewnętrznej związany z dyssypacją energii kinetycznej.

- Równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

nie wymaga komentarza.

Najczęściej, zależność przestrzenną wielkości dyskretyzuje się używając trójwymiarowej sieci punktów. Warunki brzegowe dla modelowania otoczek nakłada się

wysoko w atmosferze, gdzie elementy konwektywne są hamowane i głęboko we wnętrzu. Przeważnie, tam gdzie konwekcja staje się w przybliżeniu adiabatyczna. Objęcie w ramach jednego schematu całej otoczki konwektywnej w modelu Słońca jest dotąd niewykonalne. Trudność stanowi drastyczna różnica lokalnych skal czasowych pomiędzy atmosferą i dnem otoczki. Ewolucję czasową śledzi się zaczynając od arbitralnie wybieranych warunków początkowych. Oczekuje się, że po dostatecznie długim całkowaniu równań w czasie, statystyczne właściwości warstw konwektywnych nie będą zależały od wyboru warunków początkowych, oraz, że wyniki nie będą czułe na parametry opisujące transport przez małe elementy turbulentne. To są sprawdzalne oczekiwania.