

4 Oscylacje nieradialne i niestabilność konwektywna

4.1 Równanie na małe zaburzenia nieradialne

Rozważamy małe nieradialne zaburzenie sferycznej, nierotującej gwiazdy. Równanie opisujące zmiany zaburzenia w czasie otrzymamy linearyzując *równanie Eulera*

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi. \quad (81)$$

W tym przypadku, podobnie jak w rozdziale 1, wygodniej jest używać zaburzeń eulerowskich. W przybliżeniu liniowym, przyspieszenie ma tę samą postać,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial^2 \delta \mathbf{x}}{\partial t^2} = -\omega^2 \delta \mathbf{x}, \quad (82)$$

dla obydwu typów zaburzeń. Ostateczne równanie na oscylacje nieradialne zapisujemy w postaci operatorowej

$$\omega^2 \rho \delta \mathbf{x} = \mathbf{L} \delta \mathbf{x}, \quad (83)$$

gdzie

$$\mathbf{L} \delta \mathbf{x} = \nabla p' + \rho' g \mathbf{e}_r + \rho \nabla \Phi'. \quad (84)$$

Jawną formę ρ' w funkcji $\delta \mathbf{x}$ uzyskuje się z linearyzacji równania ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (85)$$

Biorąc pod uwagę prawa komutowania opisane w rozdziale 1 i zauważając, że również pochodna cząstkowa po czasie komutuje z zaburzeniem eulerowskim, dostajemy

$$\rho' = -\text{div}(\rho \delta \mathbf{x}). \quad (86)$$

Z użyciem tego wzoru, równania (60) i (62) prowadzą do następującego wyrażenia na p' .

$$p' = -\delta r \frac{dp}{dr} - p \Gamma_1 \text{div} \delta \mathbf{x}. \quad (87)$$

Wyrażenie na Φ' , wynikające z liniowego związku pomiędzy ρ i Φ (rów. 27) i z (86), ma następującą postać

$$\Phi'(\mathbf{x}) = G \int d^3 \tilde{\mathbf{x}} \frac{\text{div}(\rho \delta \mathbf{x})}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|}. \quad (88)$$

Korzystając z (86-88) można pokazać, że \mathbf{L} jest *operatorem hermitowskim*. Jest on rzeczywiście wystarczająco dowieść symetrii,

$$\int d^3 \mathbf{x} \mathbf{a} \cdot \mathbf{L} \mathbf{b} = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{b} \cdot \mathbf{L} \mathbf{a}. \quad (89)$$

W dowodzie wykorzystuje się związek

$$\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = \nabla f \cdot \mathbf{a} + f \nabla \cdot \mathbf{a}$$

i *twierdzenie Gaussa* do eliminacji operatorów ∇ , zaniedbuje całkę po powierzchni gwiazdy i korzysta z symetrii jądra całki we wzorze (86). Z hermitowskości operatora \mathbf{L} wynika, że

- (i) jego wartości własne, ω^2 , są rzeczywiste
- (ii) jego wektory własne $\delta\mathbf{x}$ odpowiadające różnym ω^2 są ortogonalne z wagą ρ .

Wynika też, podobnie jak w przypadku pulsacji radialnych, że ocenę wartości własnych można uzyskać z wyrażenia całkowego

$$\omega^2 = \frac{1}{I} \int d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{x}^* \mathbf{L} \delta\mathbf{x}, \quad (90)$$

gdzie

$$I = \int d^3\mathbf{x} \rho |\delta\mathbf{x}|^2.$$

Zadanie: Wyprowadzić równanie (66) wychodząc z równań (83-87).

4.2 Mody akustyczne i grawitacyjne

Posłużymy się uproszczonym opisem matematycznym oscylacji nieradialnych, wykorzystującym przybliżenia asymptotyczne ważne dla zaburzeń krótkofalowych. Dla wielkości zaburzonych przyjmujemy zależność od współrzędnych taką, jak dla fal płaskich. Kładziemy więc

$$p' = A_p \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \quad (91)$$

O składowych radialnych \mathbf{k} zakładamy, że są dostatecznie duże w sensie

$$|k_r| \gg \text{Max} \left(-\frac{d \ln p}{dr}, \frac{d \ln M_r}{dr} \right) \quad (92)$$

To założenie pozwala na zaniedbywanie zależności współczynników w operatorze \mathbf{L} od r , a także podobnej zależności amplitud A_p . Zależność od składowych horyzontalnych w formie trygonometrycznej jest dobrym przybliżeniem jeśli $r|\mathbf{k}_H| \gg 1$. Można pokazać, że wkład wyrazu zawierającego $\nabla\Phi'$ do \mathbf{L} jest w tej sytuacji zaniedbywalny.

Korzystając z przyjętych przybliżeń dostajemy kolejno,

(i) ze składowej radialnej (84)

$$-\omega^2 \rho \delta r + i k_r p' + \rho' g = 0 \quad (93)$$

(ii) z zastosowania operatora div_H do (84)

$$i \mathbf{k}_H \cdot \delta\mathbf{x} = -\frac{|\mathbf{k}_H|^2 p'}{\omega^2 \rho} \quad (94)$$

(iii) z (87) i (94)

$$\frac{p'}{p} = -\frac{i\omega^2 k_r \Gamma_1}{\omega^2 - |\mathbf{k}_H|^2 v_a^2} \delta r \quad (95)$$

(iv) z (60) i (62)

$$\frac{\rho'}{\rho} = A \frac{\delta r}{r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{p'}{p}, \quad (96)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$A \equiv \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{d \ln r} - \frac{d \ln \rho}{d \ln r}. \quad (97)$$

Teraz podstawiamy do (93) wyrażenia (95) i (96) na, odpowiednio, p' and ρ' . Widzimy, że drugi drugi składnik w (96) możemy zaniedbać na mocy (92) i $\Gamma_1 \sim 1$. Ostatecznie dostajemy

$$\left(\mathcal{N}^2 - \omega^2 + \frac{\omega^2 \mathcal{L}^2}{\omega^2 - \mathcal{L}^2} \frac{k_r^2}{|\mathbf{k}_H|^2} \right) \delta r = 0,$$

gdzie

$$\mathcal{N} \equiv \sqrt{\frac{Ag}{r}},$$

nosi nazwę nosi nazwę częstotliwości Brunta - Väisäli, a

$$\mathcal{L} = |\mathbf{k}_H| v_a$$

nosi nazwę częstotliwości Lamba. Warunek istnienia niezerowych rozwiązań prowadzi do relacji dyspersyjnej dla fal grawito-akustycznych,

$$(\omega^2 - \mathcal{N}^2)(\omega^2 - \mathcal{L}^2) = \omega^2 \mathcal{L}^2 \frac{k_r^2}{|\mathbf{k}_H|^2}. \quad (98)$$

Wobec symetrii sferycznej niezaburzonej gwiazdy właściwymi funkcjami do opisu zaburzeń są *harmoniki sferyczne*. Wzór (98) pozostanie ważny dla takiej reprezentacji po zastąpieniu

$$\mathbf{k}_H^2 \rightarrow \frac{\ell(\ell+1)}{r^2},$$

gdzie ℓ jest stopniem sferycznego harmonika, czyli ilością płaszczyzn węzłowych na sferze. Należy podkreślić, że wtedy wzór (98) stosuje się dla dowolnych ℓ , o ile tylko spełnione są nierówności (92).

Wzór (98) opisuje propagację fal w kierunku radialnym jeśli $k_r^2 > 0$. Zachodzi to gdy

$$\omega^2 > \mathcal{N}^2 \quad \text{ i } \quad \omega^2 > \mathcal{L}^2, \quad (99)$$

mówimy wtedy o *propagacji akustycznej*, albo gdy

$$\omega^2 < \mathcal{N}^2 \quad \text{ i } \quad \omega^2 < \mathcal{L}^2, \quad (100)$$

i wtedy mówimy o *propagacji grawitacyjnej*. Jeśli nierówności mają przeciwne zwroty, to lokalnie propagacja fal nie jest możliwa, a warstwy gdzie ta sytuacja ma miejsce noszą nazwę *warstw unoszenia*. W miejscach gdzie $\omega = \mathcal{N}$

albo $\omega = \mathcal{L}$ zachodzi odbicie fali. Na rysunku wykreśliłem przykładowe przebiegi bezwymiarowych częstotliwości krytycznych $\sigma_{BV} = \Re(\mathcal{N})/\sqrt{4\pi\bar{\rho}G}$ $\sigma_{L,\ell} = \mathcal{L}/\sqrt{4\pi\bar{\rho}G}$ we wnętrzach gwiazd. Warto, na górnym rysunku, zwrócić uwagę na wysokie maksimum \mathcal{N} w warstwie leżącej tuż powyżej jądra konwektywnego, gdzie $\mathcal{N} \approx 0$. Podobne maksima istnieją w wszystkich zaawansowanych ewolucyjnie gwiazdach, co powoduje, że głębokie wnętrze nie bierze udziału w pulsacje radialnych (por. rys. 1).

Dla danej wartości ℓ i dyskretnego zbioru wartości $\omega_{\ell,n}$, powstają fale stojące, czyli mody oscylacji. Zauważmy, że $k_r \rightarrow \infty$, zarówno przy $\omega \rightarrow \infty$ jak i przy $\omega \rightarrow 0$, jeżeli tylko $\mathcal{N}^2 > 0$ i $\ell > 0$. Dla politropowych modeli widmo częstotliwości modów istotnie rozciąga się od $-\infty$ do $+\infty$. Dla realistycznych modeli gwiazd warunek odbicia w atmosferze ogranicza widmo od dołu i od góry.

Mody o niskich częstotliwościach ($\omega_{\ell,n} < \omega_{0,1}$) nazywa się modami grawitacyjnymi (g). Jeżeli druga z nierówności w (99) jest silna, to (98) staje się relacją dyspersyjną dla *fal grawitacyjnych wewnętrznych*. Wtedy mamy następujące przybliżone równanie na fazę radialną fali

$$k_r \equiv \frac{d\phi_r}{dr} \approx \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{r} \sqrt{\left(\frac{\mathcal{N}}{\omega_{n,\ell}}\right)^2 - 1}.$$

Skąd dostajemy wzór na częstotliwości własne modów grawitacyjnych.

$$\pi(n + \alpha_g) \approx \sqrt{\ell(\ell+1)} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{\mathcal{N}}{\omega_{n,\ell}}\right)^2 - 1} \frac{dr}{r}, \quad (101)$$

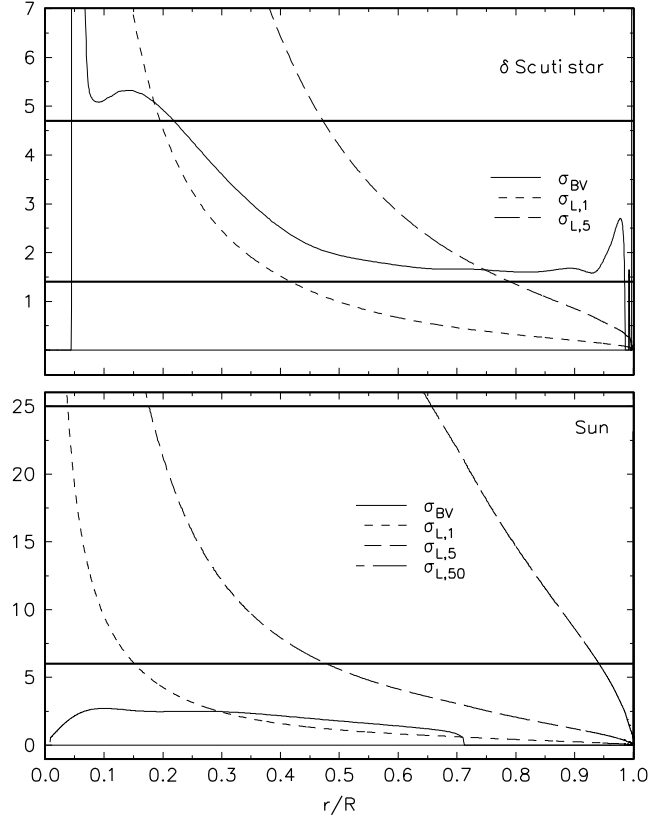
gdzie fazę α_g wyznaczają warunki brzegowe na granicach obszaru propagacji, po którym wykonuje się całkę w powyższym wzorze, a n jest radialnym rzędem modu. Widzimy, że mody g istnieją tylko dla $\ell > 0$ i tylko w takich gwiazdach w których istnieje obszar z $\mathcal{N}^2 > 0$.

Zakres wysokich częstotliwości pokrywają mody p (ciśnieniowe, akustyczne) lub, w przypadku gwiazd o kontraście gęstości $\rho_c/\bar{\rho}$, mody o charakterze mieszanym: akustycznym w otoczce i grawitacyjnym w głębokim wnętrzu. Jeżeli pierwsza z nierówności w (100) jest silna, to (98) przechodzi w relację dyspersyjną dla fal dźwiękowych. Dla modów p o dostatecznie wysokich częstotliwościach dostajemy, w sposób analogiczny jak w przypadku modów g, wzór na częstotliwości własne,

$$\pi(n + \alpha_p) \approx \int_{r_1}^R \sqrt{\left(\frac{\omega_{n,\ell}}{v_a}\right)^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}} dr. \quad (102)$$

W tym przypadku r_1 wyznacza warunek $\omega_{\ell,n} = \mathcal{L}(r_1)$. Natomiast górny punkt odbicia leży blisko powierzchni. Wzór (102) stanowi uogólnienie (77) na przypadek oscylacji nieradialnych.

Wzbudzenie modów p i g stwierdza się w zmienności wielu gwiazd leżących leżących w różnych częściach diagramu H-R. Oscylacje, nawet w przypadku znacznych amplitud, nie mają istotnego wpływu na strukturę wnętrza i ewolucję



Rysunek 3: Obszary propagacji w modelu gwiazdy typu δ Scuti ($M = 1.8M_{\odot}$, $X_c = 0.05$) i w modelu Słońca. Częstotliwości Lamba ($\sigma_{L,\ell}$) wykreślone są dla $\ell = 1, 5$ i 50 (tylko dla Słońca). W atmosferach, czego nie widać na wykresach, wartości σ_{BV} są znaczne i wynoszą ok. 30 w obydwu modelach gwiazd. Linie poziome dla Słońca pokazują zakres σ dla modów z dokładnie wyznaczonymi częstotliwościami, a dla gwiazdy typu δ Scuti, zakres σ dla modów niestabilnych. Wśród modów niestabilnych w gwiazdach typu δ Scuti są mody p, g i mody o mieszanym charakterze.

gwiazd. Pomiary częstotliwości odgrywają rolę w wyznaczaniu parametrów gwiazd. W przypadku Słońca, dla którego wyznacza się częstotliwości ponad 2000 indywidualnych modów w zakresie $\nu = \omega/2\pi$ od 1 do 5 mHz i $\ell = 0$ do 300, możliwe jest szczegółowe sondowanie wnętrza. Obserwowane oscylacje są głównie modami p. Wykrywa się też mody f odpowiadające $\ell > 90$, które spełniają w przybliżeniu taką relację dyspersyjną jak fale na głębokiej wodzie,

$$\omega_\ell \approx \sqrt{g(R)|\mathbf{k}_H|} \approx \sqrt{\frac{\ell}{3}4\pi G\bar{\rho}}$$

Dla tych modów nie mamy propagacji w kierunku radialnym i dlatego nie znalazły się wcześniej w naszej klasyfikacji.

Zadanie: Zakładając silną nierówność (93), uzasadnić zaniedbanie ostatniego wyrazu w (84).

4.3 Niestabilność konwektywna

W obszarach gdzie A (a zatem i \mathcal{N}^2) jest niedodatane fale grawitacyjne nie propagują się. Wzór (101) pozostanie ważny przy dostatecznie dużym ℓ , z tym że ω musi być wielkością urojoną, na tyle małą, żeby zachodziło $\mathcal{N}^2/\omega^2 > 1$. Gałąź rozwiązania odpowiadająca $\Im(\omega) > 0$ opisuje eksponencjalny wzrost zaburzenia. Dla dowolnie cienkiej warstwy z $A < 0$ można dobrać odpowiednio małą urojoną wartość ω tak by spełnić warunki stosowalności tego wzoru. Nierówność $A > 0$ w całym wnętrzu gwiazdy jest warunkiem koniecznym dla jej stabilności. W odróżnieniu od przypadku zaburzeń radialnych, kiedy dla wystąpienia niestabilności potrzebne było $\Gamma_1 < 4/3$ w *dostatecznie dużym obszarze* teraz wystarcza $A < 0$ w *dowolnie cienkiej warstwie*.

Warunek $A > 0$ w całym wnętrzu gwiazdy jest wystarczający dla jej stabilności względem zaburzeń nieradialnych. Przypadek $A = 0$ odpowiada neutralnej stabilności. Z (95) wynika, że $p' \rightarrow 0$ dla $\omega \rightarrow 0$, a z (96), że przy $A = 0$, również $\rho' \rightarrow 0$. Istnieją więc przemieszczenia niezaburzające równowagi hydrostatycznej, dla których $\omega = 0$.

Ponieważ mamy $\frac{d \ln p}{dr} < 0$, to kryterium niestabilności, dynamicznej względem zaburzeń nieradialnych, nazywanej *niestabilnością konwektywną*, możemy zapisać jako

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln p} - \frac{1}{\Gamma_1} < 0. \quad (103)$$

Ten warunek oznacza, że niestabilność pojawia się wtedy gdy we wnętrzu gwiazdy gęstość rośnie ze wzrostem ciśnienia wolniej niż adiabatycznie. Najprościej kryterium to uzyskuje się rozważając znak siły wyporu działającej na element gazu przemieszczany na tyle szybko, że zmiany jego gęstości i ciśnienia są związane zależnością adiabatyczną (rów. 97), na tyle jednak powoli, że jego ciśnienie pozostaje takie jak otoczenia ($p' = 0$).

Korzystając z (103) i z równania stanu, $p = p(\rho, T, \mu)$, możemy warunek

niestabilności konwektywnej zapisać jeszcze w innej postaci

$$\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{p,\mu} \left(\frac{d \ln T}{d \ln p} - \nabla_{\text{ad}}\right) + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu}\right)_{p,T} \frac{d \ln \mu}{d \ln p} < 0, \quad (104)$$

gdzie

$$\nabla_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_{S,\mu}$$

nazywana jest *gradientem adiabatycznym*. Pochodne zwykle wyliczane są dla niezaburzonego modelu gwiazdy. Pochodna cząstkowa

$$\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{p,\mu}$$

jest zawsze ujemna. Dla klasycznego gazu doskonałego o stałej liczbie cząsteczek mamy

$$\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{p,\mu} = -1, \quad \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu}\right)_{p,T} = 1, \quad \nabla_{\text{ad}} = 0.4$$

W tym przypadku niestabilność pojawia się jeśli lokalny indeks politropy n_p , zdefiniowany równością

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln p} = \frac{n_p}{n_p + 1}$$

wynosi mniej niż 1.5.

Warunek niestabilności zapisany w postaci (103) lub (104) nosi nazwę *kryterium Ledoux*. Dla warstw jednorodnych pochodna μ znika i wtedy warunek niestabilności można zapisać w postaci znanej jako *kryterium Schwarzschilda*,

$$\frac{d \ln T}{d \ln p} \equiv \nabla > \nabla_{\text{ad}} \quad (105)$$

Zmiany średniego ciężaru molekularnego, powstające w wyniku nukleosyntezy i barodyfuzji działają zawsze stabilizująco. Jednak, przy uwzględnieniu strat promienistych, pojawia się niestabilność w formie oscylacji o rosnącej amplitudzie już przy spełnieniu nierówności (105).

Niestabilność konwektywną spotyka się w niemal wszystkich typach gwiazd. Jej skutkiem jest wystąpienie makroskopowego ruchu materii wewnątrz gwiazd. Ruch ten jest istotny dla transportu energii i mieszania materii. Ma też inne skutki, takie jak wzmacnianie pól magnetycznych i wzbudzanie oscylacji. Prędkości konwektywne są zwykle znacznie mniejsze od prędkości dźwięku i zwykle nie uwzględnia się ich w warunku równowagi sił.