

10 Reakcje jądrowe

Dane z fizyki jądrowej potrzebne nam do wyliczenia mocy wydzielanej w reakcjach na jednostkę masy, $\epsilon(\rho, T, \mathbf{X})$, oraz pochodnych czasowych względnych obfitości, X_i , to przekroje czynne i wartość wydzielonej energii (ewentualnie pomniejszonej o energię unoszoną przez neutrino).

Będziemy oznaczać przez $r_{j,k}$ liczbę reakcji jąder j z jądrami k w 1 cm^3 na sekundę, a symbolem $\lambda_{i,j}$ – liczbę reakcji na jedną cząstkę. Mamy zatem

$$r_{j,k} = \lambda_{j,k} N_j N_k. \quad (284)$$

Związek $\lambda_{i,j}$ z przekrojem czynnym $\sigma_{i,j}$ wyjaśniony zostanie później. Tu zauważmy, że jednostką λ jest cm^3/s . Liczba jąder izotopu j w 1 cm^3 dana jest przez

$$N_j = \frac{\rho X_j}{A_j m},$$

gdzie A_j jest liczbą masową.

Energię wydzieloną w pojedynczej reakcji syntezy można wyliczyć odejmując nadwyżkę masy pierwiastków wyjściowych od nadwyżki masy powstającego pierwiastka. Nadwyżkę masy definiujemy jako

$$\Delta m_j = (m_j - A_j m) c^2 = 931.5 (m_j/m - A_j) \text{ MeV} \quad (285)$$

Table 2. Wybrane nadwyżki masy

izotop	A	Δm [MeV]
n	1	8.071
H	1	7.289
H	2	13.136
H	3	14.950
He	3	14.931
He	4	2.425
Be	8	4.944
C	12	0
O	16	-4.737

Przemiany jądrowe zachodzą często w cyklach składających się z ciągów syntezy i następujących po nich rozpadów promieniotwórczych powstałego niestabilnego izotopu. Podlega on rozpadowi, w wyniku którego powstaje(ą) izotop stabilny, emitowany jest foton γ , pozytron+neutrino, lub neutron. Czas życia niestabilnego jądra mierzony jest w minutach, sekundach i ułamkach sekund.

Zwykle o szybkości cyklu reakcji decyduje jedna, najwolniejsza, reakcja syntezy, powiedzmy reakcja izotopów a i b . Wtedy

$$\epsilon = \frac{\lambda_{a,b}}{\rho} N_a N_b Q_{\text{eff}} = \frac{\lambda_{a,b} \rho X_a X_b}{A_a A_b m^2} Q_{\text{eff}}, \quad (286)$$

gdzie Q_{eff} oznacza energię wydzieloną w pojedynczym cyklu pomniejszoną o energię unoszoną przez neutrino Q_ν . Mamy więc

$$Q_{\text{eff}} = \sum_{j, \text{pocz}} \Delta m_j - \sum_{k, \text{kon}} \Delta m_k - Q_\nu. \quad (287)$$

Dla określonej syntezy nie jest to wielkość dokładnie ustalona, ponieważ straty neutrinowe zależą od tego w jakim cyklu synteza zachodzi. Jeżeli Q_{eff} jest wyrażone w MeV, to żeby mieć ϵ w jednostkach c.g.s. należy pomnożyć prawą stronę przez 1.602×10^{-6} .

Zmiana obfitości pierwiastka j dana jest przez

$$\frac{dN_j}{dt} = - \left(\tilde{\lambda}_j + \sum_k \lambda_{j,k} N_k \right) N_j + \sum_k \sum_i \lambda_{i,k} N_k N_i, \quad (288)$$

gdzie $\tilde{\lambda}_j$ jest stałą rozpadu dla niestabilnych jąder. Jeżeli zmiany zachodzą w tempie znacznie szybszym niż cały cykl, to można wyliczyć N_j z (288) jako obfitość równowagową przyjmując $dN_j/dt = 0$.

10.1 Bariera potencjału

Reakcje syntezy jąder wymagają zbliżenia się na odległość d_N odpowiadającą zasięgowi sił jądrowych, która jest porównywalna z rozmiarem jądra. Odległości jądrowe mierzy się w fermich ($1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$). Promień protonu ma $\approx 0.8 \text{ fm}$. Dobrą ocenę zasięgu sił jądrowych daje wzór

$$d_N \approx 1.4(A_j^{1/3} + A_k^{1/3}) \text{ fm}.$$

Bariera potencjału sił elektrostatycznego odpychania, którą trzeba pokonać, wynosi

$$E_C = \frac{e^2 Z_j Z_k}{d_N} = 1.4 \frac{Z_j Z_k}{d_N [\text{fm}]} \text{ MeV}, \quad (289)$$

po podstawieniu $e = 4.8 \times 10^{-10}$ c.g.s. Dla reakcji p+p mamy więc $E_C \approx 0.5 \text{ MeV}$. Średnia energia kinetyczna cząsteczek gazu dana jest przez

$$\bar{E} = kT = 8.6 \times 10^{-4} T_7 \text{ MeV},$$

gdzie $T_7 = T/10^7 \text{ K}$. W centrum Słońca mamy $T_7 = 1.57$, stąd

$$\frac{E_C}{\bar{E}} = 370$$

Oceńmy jaki ułamek stanowią tam cząstki o energiach $E \geq E_C$. Z całkowania rozkładu Maxwella-Boltzmana (rów. 117) wynika,

$$\frac{N_C}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_C}^{\infty} \exp(-x) \sqrt{x} dx,$$

gdzie oznaczyliśmy $x = E/\bar{E}$. Posługujemy się całkowaniem przez części i korzystamy z silnej nierówności $x_c \gg 1$, która pozwala nam na uwzględnienie tylko członu brzegowego. W ten sposób dostajemy

$$\frac{N_C}{N} \approx 2 \sqrt{\frac{x_C}{\pi}} \exp(-x_C) = 4 \times 10^{-160},$$

a więc tylko dla czterech protonów na 10^{160} mielibyśmy $E \geq E_C$, a w całym Słońcu jest mniej niż 10^{57} protonów. Gdyby nie *efekt tunelowy*, to reakcje jądrowe nie mogłyby zachodzić.

Chmury elektronowe otaczające jądra redukują barierę potencjału, co prowadzi do efektywnego zwiększenia prawdopodobieństwa reakcji o *czynniki ekranowania* S_f . W gęstej plazmie jest to efekt znaczący. W skrajnych warunkach, synteza może zachodzić w zerowej temperaturze (*zimna fuzja*). W zastosowaniach astrofizycznych zwykle wystarcza przybliżenie słabego ekranowania. Wtedy, korzysta się z teorii Debye’a-Hückela, w której potencjał elektrostatyczny ekranowanego jądra opisuje wzór

$$\phi(r) = \frac{Ze}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right),$$

gdzie

$$r_D = \sqrt{\frac{mkT}{4\pi e^2 \zeta \rho}}, \quad \text{z} \quad \zeta = \sum_j \frac{Z_j(Z_j + 1)}{A_j} X_j, \quad (290)$$

nosi nazwę *promienia Debye’a*. W tym przybliżeniu czynnik ekranowania wynosi

$$S_f = \exp(-d_N/r_D) \approx 1 - \frac{d_N}{r_D}. \quad (291)$$

Liczbowo, mamy

$$r_D = 3 \times 10^{-9} \sqrt{\frac{T_7}{\zeta \rho_2}} \quad \text{cm},$$

gdzie ρ_n jest gęstością w jednostkach 10^n g/cm^3 . Dla ocen można położyć $\zeta = 1$. W centrum Słońca wartość r_D jest rzędu 10^{-9} . Ekranowanie powoduje więc w tym przypadku tylko niewielką redukcję bariery elektrostatycznej. Podobnie jest dla innych gwiazd ciągu głównego. Rola tego efektu jest tym większa im mniejsza jest masa gwiazdy.

10.2 Przekrój czynny na reakcje syntezy jąder

Laboratoryjny przekrój na reakcję przy bombardowaniu strumieniem cząstek j uderzających z prędkością v w tarczę z jądrami k , oznaczamy przez $\sigma_{j,k}(v)$ i rozumiemy jako liczbę reakcji liczonych na jedno jądro k w jednostce czasu przy danym strumieniu cząstek j na cm^2 w jednostce czasu. Ilość reakcji w jednym cm^3 tarczy (jeśli cząstki nie są hamowane, a reakcja jest mało prawdopodobna)

$$r_{j,k} = \sigma_{j,k}(v) v N_j N_k$$

Ta definicja pozostaje ważna dla gazu zawierającego jądra j i k . Trzeba jedynie wziąć pod uwagę rozkład względnych prędkości $\psi(v)$. Mamy więc

$$r_{j,k} = N_j N_k \int_0^\infty \sigma_{j,k}(v) \psi(v) v dv = N_j N_k \langle \sigma_{j,k} v \rangle = N_j N_k \lambda_{j,k}. \quad (292)$$

Można pokazać (*zadanie na ćwiczenia*), że rozkład prędkości względnych $\psi(v)$ jest rozkładem Maxwella-Boltzmana dla cząstek o masie zredukowanej

$$m_{\text{red}} = \frac{m_j m_k}{m_j + m_k}.$$

Ze wzoru (117) znajdujemy wtedy

$$\psi(v) v dv = \left(\frac{2}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{\pi m_{\text{red}}} \right)^{1/2} E \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) dE. \quad (293)$$

Dla identycznych cząstek, $N_j N_k$ należy we wzorze (252) zastąpić przez $\frac{1}{2} N_j^2$. Można napisać ogólnie

$$r_{j,k} = \frac{N_j N_k \lambda_{j,k}}{(1 + \delta_{j,k})}. \quad (294)$$

Czas życia jądra k ze względu na reakcję z cząstką j dany jest przez

$$\tau_{j,k} = \frac{N_j}{r_{j,k}}.$$

Jeśli trzeba wziąć pod uwagę wiele reakcji, to czas życia jądra k dany jest przez

$$\tau_k = \left(\sum_j \frac{1}{\tau_{j,k}} \right)^{-1}.$$

Przekrój czynny $\sigma_{j,k}$ zawiera czynnik penetracji, który w przybliżeniu JWKB – stosowalnym gdy $E \ll E_C$ – i przy zaniebaniu ekranowania, dany jest przez

$$P_C = \exp \left(-\frac{b}{\sqrt{E}} \right), \quad (295)$$

gdzie

$$b = 0.98 Z_j Z_k \sqrt{\frac{m_{\text{red}}}{m}} \text{ MeV}^{1/2}.$$

Postępowanie przy wyliczaniu przekroju czynnego zależy od tego, czy w jądrze powstającym w wyniku fuzji istnieją rezonanse w zakresie niskich energii. Jeśli energie cząstek są odległe od rezonansowych, to można przyjąć

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} P_C \quad (296)$$

gdzie S jest wolno zmienną funkcją energii. Funkcję tę wyznacza się eksperymentalnie. Najczęściej mierzy się σ dla E znacznie większych niż spotykane w gwiazdach i ekstrapoluje S . Dla wszystkich ważnych w astrofizyce reakcji jądrowych, wartości $S_0 = S(E_0)$ i pochodnych w rozwinięciu na szereg Taylora wokół wybranego $E = E_0$ są stabilizowane. W uproszczonych formułach można dalsze wyrazy tego szeregu pominąć.

Ze wzorów (292-296) dostajemy zatem

$$\lambda_{j,k} \approx \sigma_{j,k} v = \left(\frac{2}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{\pi m_{\text{red}}} \right)^{1/2} S_0 \int_0^\infty e^{F(E)} dE \quad (297)$$

gdzie

$$F = - \left(\frac{E}{kT} + \frac{b}{\sqrt{E}} \right).$$

Funkcja $F(E)$ osiąga maksimum dla energii

$$E = E_G \equiv (0.5kTb)^{2/3} \quad (298)$$

nazywanej *szczytem Gamowa*. Całkę wylicza się kładąc, w przybliżeniu

$$F = F_G + 0.5F_G''(E - E_G)^2$$

z

$$F_G = -3 \frac{E_G}{kT}$$

i

$$F_G'' \equiv \left(\frac{d^2 F}{dE^2} \right)_{E=E_G} = -\frac{3}{4} b E_G^{-5/2} = -\frac{3}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^{-2/3} (kT)^{-5/3},$$

co uzasadnia szybkie malenie funkcji podcałkowej przy oddalaniu się od jej maximum przy $E = E_G$. Z tym przybliżeniem, całkę w (297) wyliczamy w granicach $E - E_G$ od $-\infty$ do $+\infty$. Tak znajdujemy

$$\int_0^\infty e^F dE \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-F_G''}} e^{F_G} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (0.5b)^{1/3} (kT)^{5/6} \exp \left[-3 \left(\frac{b}{2} \right)^{2/3} (kT)^{-1/3} \right] \quad (299)$$

i ostatecznie z (297) mamy

$$\lambda_{j,k} \propto T^{-2/3} \exp \left(-\frac{f}{T_7^{1/3}} \right), \quad (300)$$

gdzie

$$f = 1.5b^{2/3} \left(\frac{k}{2} 10^7 \text{K} \right)^{-1/3} = 19.72 (Z_j Z_k)^{2/3} \left(\frac{m_{\text{red}}}{m} \right)^{1/3}.$$

Ta forma zależności szybkości reakcji od tempertury jest charakterystyczna dla reakcji nierezonansowych. Jeżeli reakcja $j + k$ jest tą wolną reakcją, która determinuje szybkość cyklu, to wykładnik temperaturowy w prawie produkcji energii dany jest przez

$$\epsilon_T = \frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln T} \approx \frac{\partial \ln \lambda_{j,k}}{\partial \ln T} \approx \frac{f}{3T_7^{1/3}} - \frac{2}{3}. \quad (301)$$

Zwróćmy uwagę na zależność ϵ_T od ładunku jąder. Im jest on wyższy, tym silniejsza zależność ϵ od T , a tym samym większa koncentracja produkcji energii w pobliżu centrum gwiazdy.

W okolicy rezonansu wyrażenie na przekrój czynny ma postać

$$\sigma \propto P_C F_r$$

gdzie

$$F_r = [(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}$$

i

$$\Gamma = \frac{h}{2\pi\tau} \ll E_r.$$

Jeżeli rezonans występuje przy niskich energiach, to często dominujący wkład do całki w wyrażeniu (292) na $r_{j,k}$ pochodzi z okolicy $E = E_r$ i we wszystkich pozostałych funkcjach E można tę równość założyć, oprócz F_r . Całka tej funkcji po dE jest elementarna i wynosi $2\pi/\Gamma$. Stąd, korzystając jeszcze z (293), dostajemy

$$\lambda_{j,k} \propto T_7^{-3/2} \exp\left(\frac{-1161E_r}{T_7}\right), \quad (302)$$

gdzie E_r jest energią E_r jest w MeV. Współczynnik liczbowe dla wszystkich rezonansowych reakcji istotnych dla wnętrz gwiazdowych są stabilizowane.

Jeżeli reakcja rezonansowa wyznacza tempo cyklu, to wykładnik temperatury dany jest przez

$$\epsilon_T \approx \frac{1161E_r}{T_7} - \frac{3}{2}. \quad (303)$$

10.3 Reakcje w fazie ciągu głównego

Cykl p-p

Kolejne reakcje cyklu oznaczamy symbolami od (pa) do (pi)

(pa) ${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$

(pb) ${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$

albo (PP-I)

(pc) ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H} + {}^1\text{H}$

albo (PP-II)

(pd) ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$

(pe) ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e (+\gamma)$

(pf) ${}^7\text{Li} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$

albo (PP-III)

(pg) ${}^7\text{Be} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$

(ph) ${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu_e$

(pi) ${}^8\text{Be} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$

Wszystkie reakcje syntezy są nierezonansowe. Reakcja (pa) wyznacza tempo cyklu, które w przybliżeniu opisuje wzór

$$r_{p-p} = r_{pa} \approx 2.48 \times 10^{12} \frac{X^2 \rho_2^2}{T_7^{2/3}} \exp\left(\frac{-15.7}{T_7^{1/3}}\right) \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (304)$$

wynikający z (284), po skorzystaniu z (300) i podstawieniu stałych liczbowych. Tempo produkcji energii na jednostkę masy (rów. 286) dane jest w przybliżeniu wzorem, w którym w szczególności zaniedbujemy nadwyżkę strat neutrinowych wynikających z udziału gałęzi PPII,

$$\epsilon_{p-p} = \frac{Q_{p-p,\text{eff}} r_{p-p}}{\rho} \approx 5.2 \times 10^6 \frac{X^2 \rho_2}{T_7^{2/3}} \exp\left(\frac{-15.7}{T_7^{1/3}}\right) \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (305)$$

Główny wkład do $Q_{p-p,\text{eff}}$ w MeV pochodzi z (pb): 5.49 (pc):12.86, (pf):17.35. Średnia energia unoszona przez neutrino, Q_ν , (pa): 0.26, (pe): 0.80 (ph): 7.2.

Wkładnik temperaturowy (wzór 301) wynosi

$$\epsilon_T = \frac{5.2}{T_7^{1/3}} - \frac{2}{3} \approx 3.9 \text{ w centrum Słońca.}$$

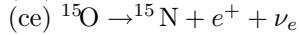
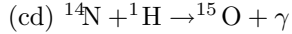
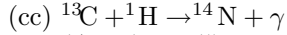
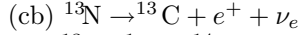
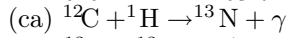
Reakcja (pb) wymagająca niższych temperatur niż (pa) prowadzi do zamiany prawie całego deuteru na He^3 w jądrze gwiazdy już przed osiągnięciem ZAMSu. We wnętrzu współczesnego Słońca względna obfitość He^3 osiąga maksimum $X_3 = 3.3 \times 10^{-3}$ dla $r = 0.28R$. Poniżej wartość X_3 określa w przybliżeniu równowaga produkcji w reakcji (pb) i w reakcjach (pc) i (pd).

zadanie Korzystając z rów.(288) wyprowadzić wzór na równowagową obfitość He^3 .

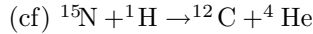
Udział gałęzi PPII rośnie z temperaturą. Dla Słońca wkład PPII do produkcji energii wynosi ok. 14%. Gałąź PPIII ma znaczenie tylko dla produkcji neutrin o wysokich energiach. Cykl CNO wnosi ok.1.5%.

Cykl CNO

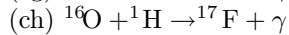
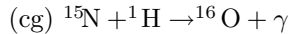
Dla gwiazd ciągu głównego populacji I, począwszy od $M \approx 1.6M_\odot$ ten cykl reakcji jest dominującym źródłem energii.

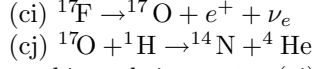


albo CN



albo CNO





Wszystkie reakcje, oprócz (cj) są nierezonansowe.

Reakcja (cd) określa tempo reakcji cyklu. Mamy więc $r_{cno} = r_{cd}$. Po skorzystaniu w (286) ze wzoru (300), podstawieniu stałych i przyjęciu, że pierwiastki CNO wnoszą połowę do Z , dostaje się w grubym przybliżeniu,

$$\epsilon_{cno} = \frac{Q_{cno,eff} r_{cno}}{\rho} \approx 9.5 \times 10^{27} \frac{XZ\rho_2}{T_7^{2/3}} \exp\left(\frac{-23,5}{T_7^{1/3}}\right) \text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}. \quad (306)$$

Główny wkład do $Q_{cno,eff}$ w MeV pochodzi z (cg): 12.13 (cc):7.55, (cd):7.29 oraz Q_ν (średnio) (cb): 0.71, (ce): 1.0 (ci): 0.94. Wykładnik temperaturowy

$$\epsilon_T = \frac{23.5}{T_7^{1/3}} - \frac{2}{3}$$

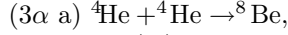
i wynosi 19.6 w centrum Słońca, a 16.2 w centrum gwiazdy wieku zero z $M = 5M_\odot$.

Wynikiem działania cyklu CNO jest nie tylko zamiana wodoru w hel, ale też stopniowa zamiana niemal wszystkich izotopów CNO w ${}^{14}\text{N}$.

zadanie: Wychodząc z równania (286) wyprowadzić wzory na równowagowe obfitości ${}^{12}\text{C}$, ${}^{13}\text{C}$ i ${}^{14}\text{N}$ w cyklu CN. Jako dane przyjąć X i Y oraz wszystkie potrzebne współczynniki λ . Przyjąć, że β -niestabilne izotopy rozpadają się momentalnie ($\tilde{\lambda} = \infty$).

10.4 Cykl 3α

Syntezę jądrową w helowym jądrze inicjuje reakcja



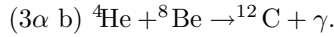
odwrotna do (pi), reakcji kończącej gałąź PPIII cyklu p-p. Jest to reakcja endotermiczna zużywająca 91.8 keV. Jądra ${}^8\text{Be}$ rozpadają się w czasie 2.6×10^{-16} sekund na dwa jądra ${}^4\text{He}$. Rozpad można traktować tak jak jonizację z ujemną energią, $\Xi_{j,i} = -91.8 \text{keV} = -1.47 \times 10^{-7} \text{erg}$, rolę elektronu pełni jedna z cząstek α . W odpowiedniku równania Sahy (120) trzeba jeszcze zastąpić m_e przez m_α i położyć $w_{i,j} = 1$. W ten sposób na ilość atomów berylu na cm^3 dostajemy

$$N({}^8\text{Be}) = 1.87 \times 10^{-33} T_8^{-3/2} N_{\text{He}}^2 \exp\left(-\frac{10.65}{T_8}\right) \text{cm}^{-3}. \quad (307)$$

Dla gwiazdy o początkowej masie $1M_\odot$ efektywna synteza węgla zaczyna się przy $T_8 \approx 1.1$ i $\rho_6 \approx 1$, co odpowiada $N_{\text{He}} \approx 1.5 \times 10^{29}$. Stąd

$$N({}^8\text{Be}) = 1.75 \times 10^{-8} N_{\text{He}}.$$

Taka śladowa ilość jąder ${}^8\text{Be}$ wystarcza dla efektywnego wydzielania energii w rezonansowej reakcji



Reakcje $(3\alpha \text{ a}) + (3\alpha \text{ b})$ tworzą cykl 3α , w którym

$$Q_{\text{eff}} = 7.367 - 0.0918 = 7.275 \text{ MeV}$$

(tu korzystamy z liczb podanych w Tabeli 2). Tempo cyklu, wyznacza reakcja $(3\alpha \text{ b})$. We wzorze (286) na tempo produkcji energii kładziemy $N_j N_k = N({}^8\text{Be})N_{\text{He}}$ i korzystamy z (307) do wyeliminowania N_{He} . Na jednostkowe tempo reakcji, λ_{jk} , bierzemy wyrażenie (302), właściwe dla reakcji rezonansowych z $E_r = 0.287$ MeV. Skąd, po podstawieniu odpowiednich stałych, otrzymujemy

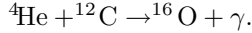
$$\epsilon_{3\alpha} \approx 0.51 \frac{\rho_6^2 Y^3}{T_8^3} \exp\left(-\frac{43.97}{T_8}\right) \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (308)$$

Wykładnik temperaturowy dla tego cyklu wynosi

$$\epsilon_T \approx \frac{43.97}{T_8} - 3,$$

co daje 37 dla gwiazd o masie $1M_\odot$ i 31 dla gwiazd o masie $5M_\odot$, dla których cykl 3α staje się efektywny przy $T_8 = 1.3$. Dla gwiazd o masach mniejszych niż ok. $2.25M_\odot$ początek cyklu ma charakter eksplozywny, co jest związane z degenarcją elektronów w jądrze gwiazdy.

Następna ważną reakcją w helowych jądrach jest



Dla tej reakcji mamy $Q_{\text{eff}} = 7.162$ MeV. Wyliczenie tempa tej reakcji stanowi nadal poważny problem dla fizyki jądrowej. Żadne z przybliżeń podanych w rozdziale 10.2 nie stosuje się do oceny tempa tej reakcji. Przybliżony wzór na tempo produkcji energii w tej reakcji można znaleźć n.p. w podręczniku Hansena i Kawalera.

Ewolucję ilości atomów He (N_4), C (N_{12}), i O (N_{16}) w jednostce objętości opisują równania

$$\frac{dN_4}{dt} = -3\lambda_{3\alpha}N_4^3 - \lambda_{\alpha,12}N_4N_{12}, \quad (309)$$

$$\frac{dN_{12}}{dt} = \lambda_{3\alpha}N_4^3 - \lambda_{\alpha,12}N_4N_{12} \quad (310)$$

i

$$\frac{dN_{16}}{dt} = \lambda_{\alpha,12}N_4N_{12}, \quad (311)$$

w których współczynniki λ zależą tylko od T . Po zakończeniu palenia helu w jądrze gwiazdy najobfitszymi pierwiastkami są węgiel i tlen. Ich względna obfitość zależy od (bardzo niepewnej) wartości $\lambda_{\alpha,12}$.

zadanie:

(1) Wyprowadzić równanie na pochodną

$$\frac{dX_{12}}{dX_4} \quad \text{gdzie} \quad X_j = \frac{m}{\rho} A_j N_j$$

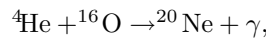
z parametrem

$$q = \frac{\lambda_{\alpha,12}}{\lambda_{3\alpha}} \frac{m}{\rho}.$$

(2) Scałkować je numerycznie między $X_4 = 1$ i 0 (mamy oczywiście $X_4 + X_{12} + X_{16} = 1$) dla kilku wartości q z przedziału $[0.1 - 10]$.

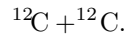
(3) Znaleźć i przedyskutować zależność końcowej ($X_4 = 0$) wartości stosunku $\frac{X_{16}}{X_{12}}$ od q .

W czasie działania cyklu 3α produkowana jest też pewna ilość neonu w reakcji



10.5 Reakcje jądrowe po wypaleniu helu

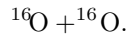
Pierwszą możliwą syntezą po wyczerpaniu helu w jądrze, jest nierezonansowa reakcja



Jest ona efektywna przy temperaturze $T_8 \gtrsim 5$, którą osiągają gwiazdy o początkowych masach $(9 \pm 1)M_\odot$. Niepewność wynika z niewiedzy o zasięgu mieszanie pierwiastków poza obszarami konwekcji we wcześniejszych fazach ewolucji. Dla gwiazd o masach przekraczających ok. $10M_\odot$, zapalenie węgla zachodzi przy zanikomej degeneracji elektronów i ma nieeksplozywny charakter

Produktem reakcji jest wzbudzone jądro magnezu, które ma kilka kanałów rozpadu. W ten sposób tworzone są alternatywnie ${}^{20}\text{Ne}$, ${}^{23}\text{Na}$, ${}^{23}\text{Mg}$ i ${}^{24}\text{Mg}$. Proces palenia węgla w jądrze konwektywnym trwa $\sim 10^2$ lat. Kolejne fazy ewolucji: synteza Si, następnie cięższych jąder aż do Fe, zachodzą w skali miesięcy i dni.

Przy $T_9 \gtrsim 1$ zaczyna się palenie tlenu w reakcji



Jej głównymi produktami są krzem ${}^{28}\text{Si}$ i siarka ${}^{32}\text{S}$. Gdy temperatura w centrum gwiazdy osiąga $T_9 \approx 3$ rozpoczyna się palenie krzemu, prowadzące do powstania niestabilnego żelaznego jądra gwiazdy, co daje początek wybuchowi supernowej typu II. W bardzo masywnych jądrach gwiazd fazę wybuchową inicjuje niestabilność dynamiczna związana z kreacją par elektron+pozytron, występująca już gdy najobfitszym pierwiastkiem jest tlen.

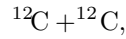
Jądro (rdzeń) żelazny jest dynamicznie niestabilny (efekty foto-dezintegracji Fe i odwrotnego rozpadu β). Skutkiem jest wybuch gwiazdy jako supernowej (typy II, Ib i Ic) związany z odrzuceniem otoczki zawierającej produkty nukleosyntezy.

10.6 Emisja neutrin

W gęstych i gorących jądrach gwiazd zaawansowanych w ewolucji neutrina tworzone są nie tylko w wyniku reakcji jądrowych. Są inne procesy prowadzące do

ich tworzenia i emisji. Wnętrza gwiazd są przezroczyste dla neutrin. Powstające neutrina są natychmiast emitowane poza gwiazdę, a ich energia jest lokalnym ubytkiem. Jeżeli w jądrze gwiazdy nie zachodzą reakcje jądrowe to mamy $\epsilon < 0$. W ewolucyjnych modelach gwiazd, zwyle od wypalenia wodoru w centrum, uwzględnia się tworzenie neutrin w wyniku anihilacji par elektron+pozytron, rozpraszania Comptona, przejść swobodno-swobodnych oraz w procesach plazmowych.

Tempo straty energii rośnie z gęstością co to powoduje, że w zdegenerowanych jądrach helowych maksimum temperatury wypada w pewnej odległości od centrum gwiazdy i tam rozpoczyna działanie cykl 3α . W późniejszych fazach syntezy termojądrowej, poczynając od reakcji



większość wyprodukowanej energii tracona jest drogą emisji neutrin.

10.6.1 Fotoneutrino

Para neutrino-antineutrino może powstawać w wyniku rozpraszania Comptona, w reakcji

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_e.$$

Straty neutrinowe związane z efektem Comptona są istotne przy względnie niskich temperaturach i gęstościach. Neutrino może też zostać wyemitowane w wyniku przejść swobodno-swobodnych elektronu w polu jądra. Rola tego efektu rośnie z gęstością i jest on najważniejszym źródłem chłodzenia przy $\rho > 10^4$ i $T_9 < 0.3$.

10.6.2 Proces plazma-neutrino

W gęstej zdegenerowanej plazmie, skwantowane fale (*plazmony*) zachowują się jak bozony o energii $E_p = 2\pi\hbar\omega_p$ i masie E_p/c^2 , gdzie

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m_e}} \left[1 + \left(\frac{2\pi\hbar}{m_e c} \right)^2 (3\pi^2 n_e)^{2/3} \right]^{-1/2}$$

jest częstotliwością plazmową. Rozpad plazmonu produkuje parę $e^- + e^+$ lub $\nu_e + \bar{\nu}_e$. To jest najważniejsze źródło chłodzenia dla $\rho > 10^6$ i $T_9 > 0.3$.

10.6.3 Anihilacja par

Przy $T_9 \sim 1$ znacząca ilość fotonów ma energię

$$\hbar\nu > 2m_e c^2,$$

umożliwiającą spontaniczną kreację par elektron+pozytron. Pary są anihilowane w reakcji odwrotnej lub w reakcji

$$e^- + e^+ \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e.$$

Energia pary neutrino-antineutrino jest lokalną stratą energii, najważniejszą przy względnie niskich gęstościach ($\rho < 10^6$) i wysokich temperaturach ($T_9 > 0.7$).

Obliczenia prawdopodobieństwa tych procesów wykonuje się w ramach teorii oddziaływań elektro-słabych. W kodach korzysta się z przybliżonych wzorów na $\epsilon_\nu(\rho, T)$.