

3 Pulsacje radialne i niestabilność dynamiczna gwiazd

3.1 Równanie na małe radialne zaburzenia równowagi gwiazdy

Rozważamy małe sferycznie-symetryczne zaburzenie równowagi gwiazdy. Niech

$$\delta r = r(t, M_r) - r_0(M_r), \quad (58)$$

gdzie r_0 oznacza położenie elementu gazu w modelu równowagowym. Zaburzony model nie znajduje się w równowadze hydrostatycznej, zatem (4) zastępujemy równaniem ruchu

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dr} - \frac{GM_r \rho}{r^2},$$

któremu, korzystając z (8), nadajemy postać.

$$\frac{dv}{dt} + 4\pi r^2 \frac{dp}{dM_r} + \frac{GM_r}{r^2} = 0. \quad (59)$$

Przyjmijmy teraz że δr i odpowiednie zaburzenie gęstości, $\delta \rho$, i ciśnienia, δp , są dostatecznie małe i zlinearyzujemy równania wokół modelu równowagowego. Zaburzenia wyliczamy dla ustalonego M_r , czyli dla ustalonego elementu gazu. Takie zaburzenia nazywamy *lagranżowskimi*.

Ogólnie zaburzenie lagranżowskie definiujemy jako różnicę

$$\delta f = f[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t] - f_0(\mathbf{x}_0),$$

gdzie wektor \mathbf{x}_0 identyfikuje element gazu n.p. współrzędne elementu w modelu niezaburzonym. Istnieje prosty związek pomiędzy tymi zaburzeniami i wprowadzonymi wcześniej zaburzeniami eulerowskimi,

$$\delta f = f' + \delta \mathbf{x} \cdot \nabla f, \quad (60)$$

który dostaje się z rozwinięcia na szereg

$$f[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t] = f_0(\mathbf{x}_0, t) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla f_0 + \dots,$$

po zaniedbaniu wyrazów kwadratowych w zaburzeniach i, w końcu, opuszczeniu wskaźnika "0" w wielkościach niezaburzonych. Prawami komutowania dla zaburzeń lagranżowskich są

$$\delta \frac{df}{dt} = \frac{d\delta f}{dt} \text{ i } \delta \frac{df}{dM_r} = \frac{d\delta f}{dM_r} \quad (61)$$

Będziemy rozważali szybkie zaburzenia, dla których pominąć możemy zmiany entropii. Dlatego przyjmujemy adiabaticzną zależność między zaburzeniami ciśnienia i gęstości.

$$\frac{\delta p}{p} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (62)$$

Współczynnik Γ_1 nazywa się wykładnikiem adiabaty. Dla jednoatomowego gazu doskonałego $\Gamma_1 = \gamma = 5/3$.

Z linearyzacji równania (8) dostajemy

$$\frac{d\delta r}{dM_r} = -\frac{dr}{dM_r} \left(2\frac{\delta r}{r} + \frac{\delta \rho}{\rho} \right)$$

Skąd, po skorzystaniu z (62)

$$\frac{\delta p}{p} = -\Gamma_1 \left(\frac{d\delta r}{dr} + 2\frac{\delta r}{r} \right). \quad (63)$$

Linearyzując (59) dostajemy

$$\frac{d^2\delta r}{dt^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\delta p}{dr} - 4g\frac{\delta r}{r} = 0. \quad (64)$$

Promień r oznacza tu położenie warstwy w modelu niezaburzonym.

Dla wielkości zaburzonych zakładamy eksponencjalną zależność od czasu. W szczególności przyjmujemy

$$\delta r = ry(r)e^{-i\omega t}.$$

Teraz równania (63-64) sprowadzamy do jednego równania na amplitudę y i częstotliwość ω .

$$p\Gamma_1 r \frac{d^2 y}{dr^2} + \left(r \frac{dp\Gamma_1}{dr} + 4p\Gamma_1 \right) \frac{dy}{dr} + \left(3 \frac{dp\Gamma_1}{dr} + 4g\rho + \omega^2 r\rho \right) y = 0, \quad (65)$$

albo

$$\frac{d}{dr} \left(p\Gamma_1 r^4 \frac{dy}{dr} \right) + \left[\omega^2 - \frac{g}{r} (3\Gamma_1 - 4) + \frac{3p}{r\rho} \frac{d\Gamma_1}{dr} \right] \rho r^4 y = 0, \quad (66)$$

Warunki brzegowe dla $y(r)$ wynikają z żądania by δr i $\frac{\delta p}{p}$ pozostawały skończone dla $r \rightarrow 0$ i dla $r \rightarrow R$.

W okolicy regularnego punktu osobliwego $r = 0$ mamy

$$\frac{dp}{dr} = -g\rho \sim r, \quad \frac{d\Gamma_1}{dr} \sim r.$$

Rozwiązania (65) poszukujemy w postaci szeregu

$$y = r^s \sum_{k=0} a_k r^k.$$

Z przyrównania do zera wyrazów przy najniższej potęgze r dostajemy $s(s+3) = 0$. Rozwiązanie skończone odpowiada wyborowi $s = 0$. Łatwo sprawdzamy, że szereg nie zawiera nieparzystych potęg r . Mamy więc

$$\frac{dy}{dr} = 0 \quad \text{dla} \quad r \rightarrow 0$$

Jeżeli $p/\rho \rightarrow 0$ dla $r \rightarrow R$, to $r = R$ jest też regularnym punktem osobliwym. Przy politropowej zależności $p(\rho)$ z wykładnikiem n_p , kładąc $M = M_r$ w (49), dostajemy

$$\frac{d\theta}{dr} \propto \frac{1}{r^2},$$

skąd mamy $p/\rho \propto \theta \propto R - r$ i dalej

$$V \equiv -\frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{gr\rho}{p} = \frac{n_p + 1}{z},$$

gdzie $z = 1 - r/R$. Dla uproszczenia w równaniu (65) założymy stałe Γ_1 . Przyjmie ono wtedy postać

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + (4 - V)r \frac{dy}{dr} + \frac{V}{\Gamma_1} \left(4 + \frac{\omega^2 r}{g} - 3\Gamma_1 \right) y = 0.$$

Znajdziemy rozwiązanie tego równania dla małych z w postaci szeregu potęgowego z ,

$$y = z^s \sum_{k=0} a_k z^k.$$

Z porównania wyrazów przy najniższych potęgach znów znajdujemy, że dla rozwiązania skończonego mamy $s = 0$. Uwzględniając wyraz liniowy w z , dostajemy związek

$$r \frac{dy}{dr} = \frac{y}{\Gamma_1} \left(\frac{\omega^2 r}{g} + 4 - 3\Gamma_1 \right) \quad \text{dla } r \rightarrow R, \quad (67)$$

który stanowi zewnętrzny warunek brzegowy. Należy podkreślić, że przyjęte uproszczenia nie mają zasadniczego charakteru. Istotny jest warunek by $\delta p/p$ pozostawało skończone przy $p \rightarrow 0$.

Nasze zadanie sprowadzone zostało do *problemu Sturm-Liouville*. Z tego faktu wynika kilka ważnych wniosków. Problem ma nieskończenie wiele rozwiązań: $y_n(r), \omega_n^2$, gdzie n oznacza kolejne liczby naturalne. Funkcje własne, y_n , są wyznaczone z dokładnością do stałego zespolonego czynnika i mają dokładnie $n - 1$ miejsc zerowych w przedziale $[0, R]$. Wartości własne ω_n^2 są rzeczywiste. Funkcje własne odpowiadające różnym n są ortogonalne z wagą ρr^4 ,

$$\int_0^R \rho r^4 y_j^* y_n dr = \delta_{jn} \int_0^R \rho r^4 |y_n|^2 dr \equiv \delta_{jn} I_n.$$

Bardzo ważne zastosowanie ma wyrażenie wariacyjne na częstotliwość,

$$\omega^2 = \frac{J}{I}, \quad (68)$$

gdzie

$$J = \int_0^R \left\{ v_a^2 \left(\frac{dy}{dr} \right)^2 + \left[\frac{g}{r} (3\Gamma_1 - 4) - 3 \frac{v_a^2}{r} \frac{d \ln \Gamma_1}{dr} \right] y^2 \right\} \rho r^4 dr,$$

a $v_a = \sqrt{p\Gamma_1/\rho}$ jest prędkością dźwięku. Wyrażenie to wynika z (66), po pomnożeniu przez y^* i scałkowaniu w przedziale $[0, R]$. Niech $y_k(r)$ i ω_k oznaczają dokładne rozwiązania (66). Rozważmy funkcję $y(r) = y_k(r) + \Delta y$, spełniającą warunki brzegowe (41), i częstotliwości $\omega = \omega_k + \Delta\omega$. Z (68), zachowując tylko wyrazy liniowe w Δ ch i korzystając z (66), dostajemy

$$\Delta\omega = \frac{\Delta J - \omega^2 \Delta I}{2\omega I} = 0.$$

Skąd wynika, że można uzyskać dobre przybliżenie na wartość ω^2 w oparciu o wyrażenie (68), jeśli mamy nawet nie najlepsze przybliżenie dla funkcji $y(r)$.

Wyrażenie (68) pozwala, na uzyskanie przybliżonego wyrażenia na zmianę częstotliwości modu $\Delta\omega$ związanej z małą zmianą modelu gwiazdy, bez konieczności wyliczania zmiany $y(r)$. Zmiana modelu może wynikać zarówno z uwzględnienia dodatkowych sił jak i n.p. z modyfikacji w opisie równania stanu materii gwiazdy. Skorzystamy z tego w rozdziale 3.3.

3.2 Mody pulsacji radialnych

Rozwiązania opisują kolejne *mody pulsacji radialnych*. Zbiór rozwiązań tego problemu, $\omega_n, y_n(r)$ z $n=1,2,\dots$, opisuje kolejne mody pulsacji radialnych. Liczby naturalne, n , nazywamy *radialnym rzędem modu*. Mod $n = 1$ (czasami oznaczany $n = 0$ i nazywany fundamentalnym) nie ma miejsc zerowych (*węzłów*) w przedziale $[0, R]$. Dla kolejnych modów nazywanych *owertonami* zachodzi

$$\omega_n > \omega_{n-1}.$$

Zajmiemy się właściwościami widma częstości pulsacji radialnych. Dla realistycznych modeli gwiazd wartości ω_n wyznacza się liczbowo. Rozpatrzmy wprawie bardzo uproszczone modele, dla których można znaleźć rozwiązania analityczne.

Zaniedbując zmienność Γ_1 (nienajgorsze przybliżenie), możemy skorzystać z równania pulsacji w postaci (67). Następne przybliżenie jest już zupełnie nierealistyczne. Zakładamy mianowicie, że niezaburzona gęstość w modelu nie zależy od r . Mamy więc

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \equiv \bar{\rho}.$$

Z równań (8) i (9) dostajemy wtedy

$$M_r = Mx^3 \quad \text{ i } \quad p = \frac{GM\rho}{2R}(1-x^2),$$

gdzie $x = r/R$. Skąd mamy

$$V \equiv -\frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{2x^2}{1-x^2}, \quad v_a^2 = \frac{GM\Gamma_1}{2R}(1-x^2)$$

i

$$(1-x^2)x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (4-6x^2)x \frac{dy}{dx} + bx^2 y = 0, \quad (69)$$

gdzie

$$b = \frac{6}{\Gamma_1} \left(\frac{\omega^2}{4\pi G \bar{\rho}} + \frac{4}{3} - \Gamma_1 \right). \quad (70)$$

Szukamy rozwiązania w formie szeregu

$$y = \sum_{k=0} a_k x^k.$$

Po podstawieniu do (69) i przyrównaniu do zera współczynników przy x^k , dostajemy następujący wzór rekurencyjny,

$$a_{k+2} = a_k \frac{k(k+5) - b}{(k+2)(k+5)}.$$

Rozwiązaniem jest szereg x^2 . Tylko dla $b = k(k+5)$ szereg ten jest skończony. W pozostałych przypadkach szereg jest nieskończony i rozbieżny w $x = 1$, bo $a_{k+2}/a_k \rightarrow 1$ dla $k \rightarrow \infty$. Wynika stąd, że tylko dla $b = k(k+5)$ możemy spełnić zewnętrzny warunek brzegowy. Po skorzystaniu z (70), dostajemy

$$\omega_n = \sqrt{4\pi G \bar{\rho} \left[\Gamma_1 - \frac{4}{3} + \frac{\Gamma_1}{3} (n-1)(2n+3) \right]}, \quad (71)$$

gdzie położyliśmy $k = 2n - 2$, tak by n oznaczało radialny rząd modu.

zadanie: Proszę pokazać, że dla modelu z

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{3x^2}$$

mamy

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2}{3} \pi G \bar{\rho} \Gamma_1 (2n-2+s)(2n+1+s)}, \quad (72)$$

gdzie

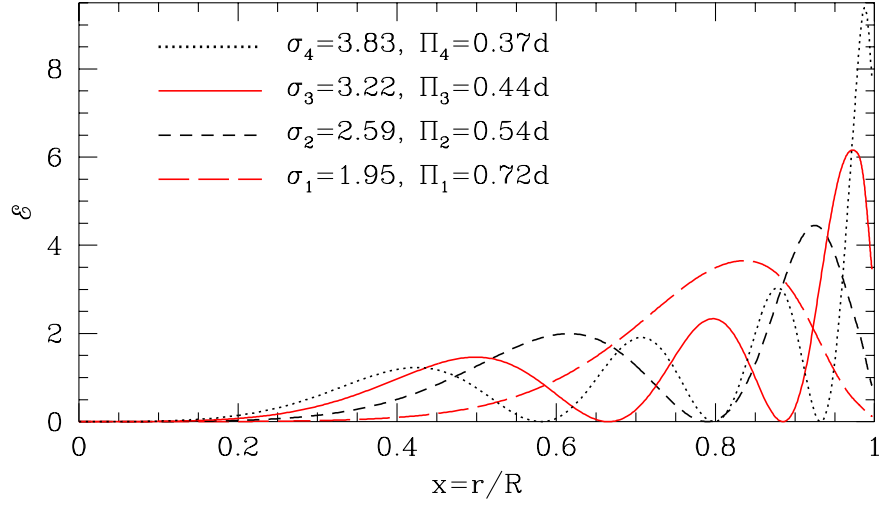
$$s = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(3 - \frac{4}{\Gamma_1} \right)} - 1 \right].$$

uwaga: Osobliwość ρ i p w centrum wymaga modyfikacji warunku brzegowego w centrum, ale nie stanowi problemu. Przyjęta wartość s odpowiada rozwiązaniu, dla którego przy $r \rightarrow 0$ mamy $\rho y^2 r^2 \rightarrow 0$, co oznacza znikomy wkład do energii oscylacji z okolic osobliwości.

Dla dowolnych modeli gwiazd częstotliwości bezwymiarowe, σ_n , definiujemy związkiem

$$\omega_n \equiv \sigma_n \sqrt{4\pi G \bar{\rho}}. \quad (73)$$

Przyjmując $\Gamma_1 = 5/3$ dostajemy z (71) $\sigma_1 = 0.58$, a z (72) $\sigma_1 = 0.85$. Typowe wartości dla realistycznych modeli gwiazd pulsujących mieszczą się w zakresie 1.4–2.



Rysunek 2: Rozkłady energii pulsacji we wnętrzu realistycznego modelu mało-masywnej Cefeidy

Na rysunku 2 pokazany jest typowy rozkład energii pulsacji dla pierwszych czterech modów radialnych w realistycznym modelu gwiazdy. Wykreślone są funkcje

$$\mathcal{E} = \frac{y(x)^2 \rho x^4}{\int_0^1 y(x)^2 \rho x^4 dx}.$$

Warstwy leżące poniżej $x = 0.2$ obejmujące ponad 70% masy gwiazdy, nie wnoszą istotnego wkładu do energii (nie pulsują). To, że w pulsuje tylko otoczka gwiazdy jest charakterystyczne dla wszystkich gwiazd o strukturze olbrzymów.

Dla przybliżonych ocen, wartości σ_n można traktować jako stałe. Częściej używanymi wielkościami są *stałe pulsacyjne*, Q_n , które definiuje następujący wzór na okresy pulsacji.

$$\Pi_n \equiv \frac{2\pi}{\omega_n} = Q_n \sqrt{\frac{\bar{\rho}_\odot}{\bar{\rho}}}. \quad (74)$$

Z definicji (73-74) wynika,

$$Q_n = \frac{1}{\sigma_n} \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}_\odot}} = \frac{0.067}{\sigma_n} \text{ d}. \quad (75)$$

Teoretyczną *zależność okres-jasność-temperatura* otrzymuje się z równania (74) po dodaniu zależności masa-jasność i $L/L_\odot = (T_{\text{eff}}/T_{\text{eff},\odot})^4 (R/R_\odot)^2$.

Dla $n \gg 1$ mamy $\sigma_n \approx n\sqrt{\Gamma_1/2/3}$, zarówno ze wzoru (71) jak i z (72). Proporcjonalność $\omega_n \sim n$ w granicy $n \gg 1$ wynika wprost z (66), którego

przybliżonym (JWKB) rozwiązaniem, gdy $\sigma_n \gg 1$, jest

$$y_n \propto \frac{\sin \Phi_n}{r^2 \sqrt{v_a \rho}}, \quad \Phi_n = \omega_n \int_0^r \frac{d\tilde{r}}{v_a}. \quad (76)$$

Warunek brzegowy nałożony przy $r \approx R$, prowadzi do zależności

$$\pi(n + \alpha) = \omega_n \int_0^R \frac{d\tilde{r}}{v_a}, \quad (77)$$

w której faza α , opisuje odbicie fali w warstwach zewnętrznych. Faza ta jest rzędu 1 i słabo zależy od ω . W tej granicy pulsacje radialne są sferycznymi, stojącymi falami dźwiękowymi.

Akustyczny charakter pulsacji radialnych nawet przy niskich n jest widoczny na rysunku 2. Skracanie się długości fali ze wzrostem x jest konsekwencją malenia $v_a \propto \sqrt{T}$. Odbicie fali przed jej dotarciem do centrum gwiazdy ma związek z wydłużaniem się fali. Odbicie fali ma miejsce jeśli wyliczona długość fali staje się porównywalna z odległością na której prędkość dźwięku zmienia się o czynnik e . Przybliżony warunek na odbicie fali ma postać $\omega < g/v_a$.

3.3 Kryterium stabilności dynamicznej

Zauważmy, że zarówno ze wzoru (71) jak i (72) wynika, że $\omega_1 = 0$ gdy $3\Gamma_1 = 4$. Przekonamy się, że tak jest zawsze, jeżeli wartość Γ_1 można traktować jako stałą. Korzystamy ze wzoru (68), z którego wynika, że znak ω^2 jest taki sam jak znak J . Z wyrażenia na J wynika od razu, że przy stałym Γ_1 , warunkiem wystarczającym dla stabilności dynamicznej gwiazd względem zaburzeń radialnych jest

$$\Gamma_1 > \frac{4}{3} \quad (78)$$

Można też sprawdzić, że dla $\Gamma_1 = \frac{4}{3}$ rozwiązaniem równania (66) jest $\omega_1 = 0$ i $y_1 = \text{const}$, co dowodzi że (78) jest także warunkiem koniecznym. W przypadku politropowego równania stanu $\Gamma_1 = 4/3$ odpowiada $n = 3$, a zatem gwiazda z takim równaniem stanu jest neutralnie stabilna. W rozdziale 2 zauważyliśmy, że dla politropy $n = 3$ mamy $dM/d\rho_c = 0$ i że odpowiada to przejściu od konfiguracji stabilnych do niestabilnych.

Jeżeli Γ_1 nie jest stała, to dla wystąpienia niestabilności, musimy mieć $\Gamma_1 < \frac{4}{3}$ w dostatecznie dużym obszarze. W przypadku, gdy Γ_1 zmienia się niewiele we wnętrzu gwiazdy, to kryterium stabilności można zapisać następującej postaci.

$$\bar{\Gamma}_1 = \frac{\int_0^R \Gamma_1 p r^2 dr}{\int_0^R p r^2 dr} > \frac{4}{3}. \quad (79)$$

Dla dowodu korzystamy z wyrażenia (68) na częstotliwość, gdzie w liczniku kładziemy $y = \text{const}$, co na pewno jest dobrym przybliżeniem dla y_1 w pobliżu $\Gamma_1 = 4/3$. W liczniku (J) zatępujemy $-dp/dr$ przez $g\rho$ i eliminujemy tę pochodną

całkując przez części. Wyrazy brzegowe znikają i z nowej postaci J wynika wprost warunek (79).

Relatywistyczny warunek stabilności dynamicznej, w granicy słabego pola, ma postać

$$\bar{\Gamma}_1 > \frac{4}{3} + q \frac{GM}{Rc^2}. \quad (80)$$

Współczynnik q jest rzędu 1. Dokładna wartość zależy od struktury gwiazd.

Ciśnienie stabilizuje równowagę gwiazdy. Im wyższe Γ_1 tym większa sprężystość gazu i rola ciśnienia. Efekty realtywistyczne wzmacniają rolę grawitacji działając destabilizująco. Wybuch *supernowej* inicjuje niestabilność dynamiczna rdzenia żelaznego. W tym przypadku, obniżenie Γ_1 spowodowane jest fotodysocjacją jąder atomowych i odwrotnymi rozpadami β .