

## 5 Termodynamika wnętr gwiazdowych

W tym rozdziale zajmiemy się wyznaczaniem zależności termodynamicznych potrzebnych do konstruowania modeli gwiazd i do badania ich stabilności. Będziemy więc znajdować funkcje  $p(\rho, T, \mathbf{X})$  i  $u(\rho, T, \mathbf{X})$ , gdzie wektor  $\mathbf{X}$  reprezentuje obfitości pierwiastków chemicznych, oraz ich pochodne. Składowe  $\mathbf{X}$  będziemy traktowali jako zewnętrznie ustalone parametry. Takie podejście w zastosowaniu do modelowania budowy gwiazd jest uzasadnione z wyjątkiem krótkiej fazy ewolucji związanej z wybuchem supernowej, kiedy reakcje jądrowe należy traktować tak jak reakcje chemiczne.

Wszystkie obliczenia wykonywać będziemy przy założeniu *lokalnej równowagi termodynamicznej*. Uzasadnieniem jest to, że droga swobodna molekuł jest znacznie krótsza od odległości, na której parametry termodynamiczne zmieniają się znacząco. Będziemy posługiwać się pojęciem ciśnieniowej skali odległości

$$H_p = -\frac{dr}{d \ln p} = \frac{p}{g\rho}.$$

Podobnie zdefiniowane są odległości  $H_\rho$  i  $H_T$ . W atmosferze Słońca  $H_p \approx 150\text{km}$ , a droga swobodna atomu H jest  $\sim 1\text{ cm}$ . Dysproporcja rośnie w głąb.

We wnętrzach gwiazd promieniowanie elektromagnetyczne może wносить istotny wkład do ciśnienia i energii wewnętrznej. Fotony są lokalnie sprzężone z gazem, jeżeli droga swobodna fotonu jest znacznie krótsza od  $H_T$ . Warunek ten nie jest spełniony w atmosferze.

### 5.1 Tożsamości termodynamiczne

Oznaczmy

$$\chi_T \equiv \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_\rho \text{ i } \chi_\rho \equiv \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_T. \quad (106)$$

Pierwsze prawo termodynamiki zapiszemy w postaci

$$TdS = du - \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (107)$$

gdzie  $S$  oznacza entropię na jednostkę masy. Mamy stąd wyrażenie na ciepło właściwe przy stałej objętości

$$c_v \equiv T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\rho = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_\rho \quad (108)$$

Z pomocą (106-108) wyliczymy pochodne adiabatyczne (przy ustalonej wartości  $S$ ), które występują w kryteriach stabilności dynamicznej

$$\Gamma_3 - 1 \equiv \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S = \frac{1}{c_v T} \left[ \frac{p}{\rho} - \left( \frac{\partial u}{\partial \ln \rho} \right)_T \right], \quad (109)$$

$$\Gamma_1 \equiv \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_S = \chi_\rho + \chi_T (\Gamma_3 - 1) \quad (110)$$

i

$$\nabla_{\text{ad}} \equiv \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_S \equiv \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1}. \quad (111)$$

Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu dane jest przez

$$c_p \equiv T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{\Gamma_1 c_v}{\chi_\rho}. \quad (112)$$

To wyrażenie najłatwiej otrzymać metodą jakobianów korzystając ze (108) i (110). Inne użyteczne wyrażenie na  $c_p$  dostaniemy rozważając wpierw różniczkę zupełną potencjału termodynamicznego,  $\tilde{g} \equiv u - ST + p/\rho$ , na którą mamy ze (109)

$$d\tilde{g} = -SdT + \frac{dp}{\rho}, \quad (113)$$

skąd wynika

$$\left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho T} \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \quad (114)$$

i dalej, znów posługując się metodą jakobianów,

$$c_p = \frac{p}{\rho T \nabla_{\text{ad}}} \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \quad (115)$$

## 5.2 Klasyczny jednoatomowy gaz doskonały

Ilość cząstek znajdujących w stanie o określonej energii  $E_s$  dana jest znanym wzorem Boltzmanna

$$N_s = \mathcal{C} w_s \exp \left( -\frac{E_s}{kT} \right), \quad (116)$$

gdzie  $\mathcal{C}$  jest stałą, a  $w_s$  oznacza wagę statystyczną stanu.

Rozkład pędów,  $\mathbf{p}$  dla swobodnych, jednoatomowych, nierelatywistycznych cząsteczek nosi nazwę *rozkładu Marwella-Boltzmanna*. Znajdziemy go kładąc w (116)

$$E_s = \frac{m_j |\mathbf{v}|^2}{2} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m_j}$$

i  $dw_s = d^3\mathbf{p}$ . Całkowita ilość cząsteczek o masie  $m_j$  w jednostce objętości dana jest przez

$$N = 4\pi\mathcal{C} \int_0^\infty \exp \left( -\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m_j kT} \right) |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|.$$

Stąd, po całkowaniu (116) z wykorzystaniem znanej całki

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

dostajemy wyrażenie na

$$\mathcal{C} = \frac{(2\pi m_j kT)^{3/2}}{N}$$

i ostatecznie wzór

$$dN(\mathbf{p}) = \frac{N}{(2\pi m_j kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m_j kT}\right) d^3\mathbf{p}. \quad (117)$$

Ciśnienie gazu wyliczamy jako strumień pędu na jednostkę powierzchni, którą dowolnie wybieramy jako płaszczyznę  $yz$  w kartezjańskim układzie odniesienia. Dostajemy w ten sposób

$$p_g = \int p_x v_x dN(\mathbf{p}) = \frac{1}{3m_j} \int |\mathbf{p}|^2 dN(\mathbf{p}) = NkT. \quad (118)$$

Wykonując całkę skorzystaliśmy z

$$\int_0^\infty x^4 \exp(-x^2) dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}.$$

Wzór (118) na  $p_g$  pozostaje ważny dla gazu, który jest mieszaniną cząstek o różnych masach  $m_j$ . Jeżeli względne obfitości masowe dane są przez  $X_j$ , wtedy

$$N_j = \frac{X_j \rho}{m_j}$$

Wzory (18-20) w rozdziale 1 wynikają z przyjęcia

$$N_1 \approx \frac{2X\rho}{m}, \quad N_4 \approx \frac{3Y\rho}{4m} \text{ i } \sum_{j>4} X_j \approx \frac{0.5Z\rho}{m}$$

Jeżeli w energii wewnętrznej gazu  $u_g$  liczonej na jednostkę masy uwzględniamy tylko energię kinetyczną cząsteczek, to całkując  $|\mathbf{p}|^2/2m$  z rozkładem (117) dostajemy wzór (20).

$$u_g = \frac{1}{2\rho m_j} \int |\mathbf{p}|^2 dN(\mathbf{p}) = \frac{3}{2\rho} NkT = \frac{3p_g}{2\rho}. \quad (119)$$

W tym najprostszym przypadku z równań (106) i (109-111) dostajemy

$$\chi_T = \chi_\rho = 1, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{5}{3}, \quad \nabla_{\text{ad}} = \frac{2}{5}.$$

### 5.3 Równanie Sahy

Przy wyliczaniu parametrów termodynamicznych w warstwach, gdzie zachodzi częściowa jonizacja obfitych pierwiastków, musimy uwzględnić udział energii jonizacji w  $u$  i zależność  $N$  od  $T$  i  $\rho$ . Względne ilości atomów znajdujących się w kolejnych stanach jonizacji dane są, w przybliżeniu gazu doskonałego, *równaniem Sahy*. Równanie to uzyskamy ze wzoru (116).

Oznaczmy przez  $N_{j,i}$  ilość atomów pierwiastka  $j$  w stanie  $i$ -tej jonizacji, przez  $w_{j,i}$  stosunek wag statystycznych stanu wyższej do niższej jonizacji. Wynosi

on 1/2 dla H i drugiej jonizacji He, i 2 dla pierwszej jonizacji He. Wielkość  $w_e$  oznaczać będzie wagę statystyczną stanów swobodnego elektronu, a  $\Xi_{j,i}$  – energię jonizacji. Dla H, HeI i HeII wynosi ona, kolejno, 13.6, 24.6 i 54.4 eV. Mamy wtedy ze (116)

$$\frac{N_{j,i}}{N_{j,i-1}} = w_{j,i} \exp\left(-\frac{\Xi_{j,i}}{kT}\right) \int \frac{dw_e}{d|\mathbf{p}_e|} \exp\left(-\frac{|\mathbf{p}_e|^2}{2m_e kT}\right) d|\mathbf{p}_e|.$$

Z zakazu Pauliego wynika następujący związek

$$dw_e = \frac{2}{N_e} \frac{4\pi |\mathbf{p}_e|^2}{h^3} d|\mathbf{p}_e|,$$

gdzie  $N_e$  jest ilością elektronów w jednostce objętości. Po scałkowaniu dostajemy

$$\frac{N_{j,i}}{N_{j,i-1}} = 2w_{j,i} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{N_e h^3} \exp\left(-\frac{\Xi_{j,i}}{kT}\right). \quad (120)$$

W obszarach częściowej jonizacji helu i wodoru wartości  $\Gamma_1$  i  $\nabla_{\text{ad}}$  są znacząco obniżone, co sprzyja wystąpieniu niestabilności dynamicznej dla zaburzeń, odpowiednio, radialnych i nieradialnych.

Dla ilustracji rozpatrzmy przypadek czystego gazu wodorowego. Oznaczmy przez  $s$  stopień jonizacji. Liczba elektronów w  $1 \text{ cm}^3$  dana jest przez

$$N_e = \frac{\rho s}{m}$$

Równanie Sahy, po podstawieniu odpowiednich stałych, redukuje się do

$$\frac{s^2}{1-s} = 4.01 \times 10^{-9} \frac{T^{1.5}}{\rho} e^{-\theta}, \quad (121)$$

gdzie

$$\theta \equiv \frac{\Xi_{1,1}}{kT} = \frac{1.578 \times 10^5}{T}.$$

Różniczkując (121) dostajemy

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \ln \rho}\right)_T = -\frac{s(1-s)}{2-s}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \ln T}\right)_\rho = \frac{s(1-s)}{2-s}(1.5 + \theta).$$

Stopień jonizacji maleje z gęstością i rośnie z temperaturą. Zachowanie z głębokością w gwiazdzie nie musi być monotoniczne. Na przykład, w atmosferze, która jest niemal izotermiczna,  $s$  maleje. Głębiej jednak przeważnie rośnie.

Mamy

$$p = \frac{kT\rho}{m}(1+s).$$

Używając powyższych wzorów w(106), dostaniemy

$$\chi_\rho = \frac{2}{(2-s)(1+s)} \quad \text{i} \quad \chi_T = \frac{(1+s)(2-s) + s(1-s)(1.5 + \theta)}{(2-s)(1+s)}.$$

Energia wewnętrzna, w której uwzględniamy energię jonizacji, dana jest wzorem

$$u_g = \frac{3}{2} \frac{kT}{m} (1+s) + s \frac{\Xi_{1,1}}{m} = \frac{kT}{m} (1.5 + 1.5s + s\theta).$$

Różniczkując, znajdujemy

$$c_v T = \frac{kT}{m} \left( 1.5 + 1.5s + \frac{s(1-s)}{2-s} (1.5 + \theta)^2 \right)$$

i

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = - \frac{kT}{m} \frac{s(1-s)(1.5 + \theta)}{2-s}.$$

Używając dwóch ostatnich wzorów w (109), dostajemy

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{(1+s)(2-s) + s(1-s)(1.5 + \theta)}{1.5(1+s)(2-s) + s(1-s)(1.5 + \theta)^2} \quad (122)$$

*Zadanie* Proszę wyprowadzić podobne wyrażenia na  $\nabla_{\text{ad}}$  i  $\Gamma_1$  i zbadać zachowanie tych wielkości w funkcji  $s$ .

Na rysunku 4 wykreślone są wartości  $\log T$  i pochodnych adiabatycznych w funkcji  $\log \rho$  w miejscach gdzie  $s = 1/2$ . Częściowa jonizacja zawsze obniża  $\Gamma_1$  i  $\nabla_{\text{ad}}$ , działa więc w kierunku destabilizacji równowagi gwiazdy względem zaburzeń radialnych i nieradialnych.

## 5.4 Mieszanina klasycznego jednoatomowego gazu doskonałego i promieniowania

We wnętrzach gwiazd poniżej fotosfery promieniowanie może być traktowane, w bardzo dobrym przybliżeniu, jako relatywistyczny gaz bozonów pozostający w lokalnej równowadze termodynamicznej z pozostałymi składnikami materii. Do ciśnienia i gęstości energii wewnętrznej gazu dodajemy więc wkład od promieniowania. Piszemy

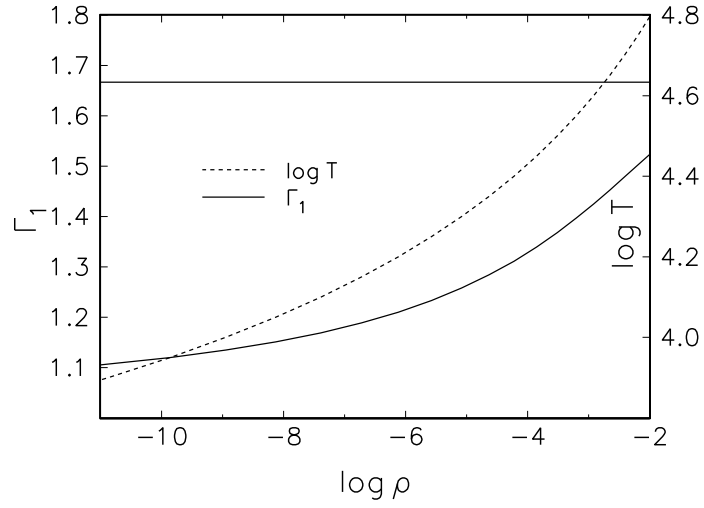
$$p = p_g + p_{\text{rad}} \quad \text{ i } \quad u = u_g + u_{\text{rad}}, \quad (123)$$

W rozdziale poświęconym transportowi energii przez promieniowanie wyprowadzimy następujące wyrażenia na ciśnienie i energię wewnętrzną gazu fotonowego.

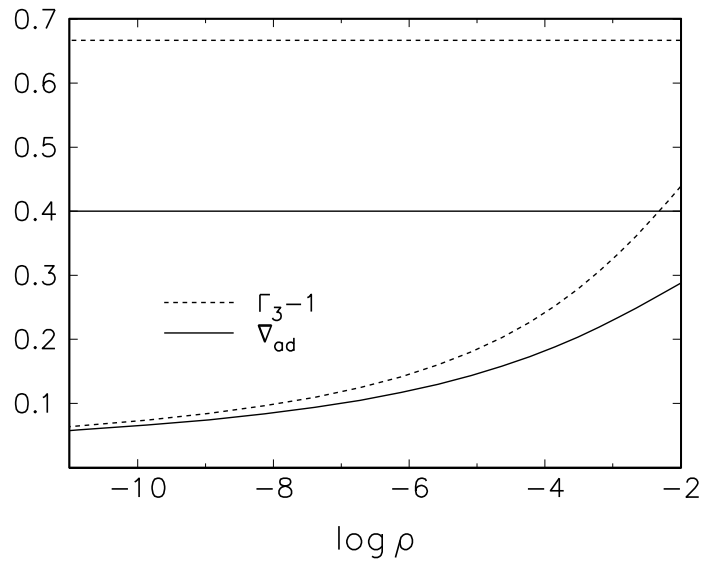
$$p_{\text{rad}} = \frac{aT^4}{3} \quad \text{ i } \quad u_{\text{rad}} = \frac{aT^4}{\rho} \quad (124)$$

Dla materii złożonej z całkowicie zjonizowanego gazu i promieniowania, wszystkie potrzebne pochodne termodynamiczne można wyrazić przez

$$\beta = \frac{p_g}{p} = \left( 1 + \frac{am\mu T^3}{3k\rho} \right)^{-1}. \quad (125)$$



Parametry wzdłuż linii  $s = \frac{1}{2}$ . Linia pozioma pokazuje wartość  $\Gamma = \frac{5}{3}$  dla gazu doskonałego.



Rysunek 4: Wartości  $\Gamma_3 - 1$  i  $\nabla_{\text{ad}}$  wzdłuż linii  $s = \frac{1}{2}$ . Linie poziome pokazują wartości  $\Gamma_3 - 1 = \frac{2}{3}$  i  $\nabla_{\text{ad}} = \frac{2}{5}$  dla niejonizowanego gazu doskonałego.

Logarytmiczne pochodne tej wielkości dane są przez

$$\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial \ln \rho}\right)_T = 1 - \beta \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial \ln T}\right)_\rho = 3(\beta - 1).$$

Używając tych wyrażeń w (106), dostajemy

$$\chi_T = 4 - 3\beta \quad \text{i} \quad \chi_\rho = \beta.$$

Teraz wyrazimy energię mieszniny gazu i promieniowania w postaci

$$u = \frac{3}{2} \frac{p}{\rho} (2 - \beta), \quad (126)$$

Skąd na ciepło właściwe przy stałej objętości mamy

$$c_v \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_\rho = \frac{3}{2} \frac{p}{\rho T} (8 - 7\beta),$$

oraz

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \ln \rho}\right)_T = -3 \frac{p}{\rho} (1 - \beta).$$

Teraz już łatwo z pomocą równań (109-111), znajdziemy

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{2}{3} \frac{4 - 3\beta}{8 - 7\beta}, \quad (127)$$

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{8 - 6\beta}{32 - 24\beta - 3\beta^2}, \quad (128)$$

$$\Gamma_1 = \beta + \frac{2}{3} \frac{(4 - 3\beta)^2}{8 - 7\beta}. \quad (129)$$

Łatwo też sprawdzimy, że dla  $\beta$  malejącego od 1 do 0,  $\nabla_{\text{ad}}$  maleje monotonicznie od 0.4 do 0.25, a  $\Gamma_1$  od 5/3 do 4/3. Promieniowanie wpływa destabilizująco na równowagę dynamiczną gwiazd. W mechanice newtonowskiej, efekt ten nie może samodzielnie spowodować niestabilności względem zaburzeń radialnych. Jednak przy uwzględnieniu efektów relatywistycznych, niestabilność występuje już dla  $\Gamma_1$  nieco większych niż 4/3 (rów. 80).

Wróćmy jeszcze do zależności (126). Jeśli skorzystamy z niej w równaniu (15), to otrzymamy następującą postać twierdzenia o wiriale dla mieszaniny jednoatomowego gazu doskonałego i promieniowania.

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} \int_0^M \frac{p}{\rho} (2 - \beta) dM_r \geq -\frac{\mathcal{W}}{2}.$$

Zauważmy, że przy  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{U} \rightarrow -\mathcal{W}$  i energia całkowita gwiazdy  $\mathcal{E} \rightarrow 0$ . W tej granicy gwiazda traci swój zapas energii. niezależnie od wartości  $M$  i  $R$ .

*Zadanie:* Przypuśćmy, że gwiazda zbudowana jednoatomowego gazu doskonałego i promieniowania, jest opisana politropą  $n = 3$ . Posługując się Tabelą 1, znaleźć jawną postać zależności  $M(\beta, \mu)$

## 5.5 Elektronowy gaz zdegenerowany

Zapiszemy zakaz Pauliego dla elektronów w postaci

$$dN_e(|\mathbf{p}|) \leq \frac{2}{h^3} 4\pi |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|. \quad (130)$$

Dla gazu niezdegenerowanego mamy silną nierówność, znak = odpowiada pełnej degeneracji. Rozważymy wpierw ten przypadek. Oznaczmy przez  $p_F$  maksymalną wartość modułu pędu (*pęd Fermiego*) i po scałkowaniu dostajemy

$$N_e = \frac{2}{h^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3. \quad (131)$$

Z drugiej strony, ilość elektronów na jednostkę objętości, dana jest przez

$$N_e = \frac{\rho}{m\mu_e} \approx \frac{\rho(X + 0.5Y + 0.5Z)}{m} = \frac{\rho(1 + X)}{2m}.$$

Stąd

$$p_F = h \left[ \frac{3(1 + X)\rho}{16\pi m} \right]^{1/3}. \quad (132)$$

Postępując tak jak w przypadku doskonałego, wyliczymy ciśnienie gazu elektronowego,  $p_e$ , jako całkę

$$p_e = \int_0^{p_F} p_x v_x dN(|\mathbf{p}|).$$

W przypadku nierelatywistycznych elektronów mamy  $\mathbf{p} = m_e \mathbf{v}$ . Po scałkowaniu dostajemy

$$p_e = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} p_F^5. \quad (133)$$

Podstawiając wyrażenie na  $p_F$ , mamy ostatecznie

$$p_e = K \rho^{5/3} \text{ z } K = \frac{8\pi h^2}{15m_e} \left[ \frac{3(1 + X)}{16\pi m} \right]^{5/3}. \quad (134)$$

Liczbowo,  $K = 3.16 \times 10^{12}$  dla  $X = 0$ .

W przypadku pełnej degeneracji elektronów wkład niezdegenerowanego gazu jąder atomowych,  $p_j$ , do całkowitego ciśnienia jest mały, co wynika z oszacowania

$$\frac{p_j}{p_e} = \frac{k}{m\mu_j K} \frac{T}{\rho^{4/3}} = \frac{2.6 \times 10^{-4}}{\mu_j} \frac{T_9}{\rho_6^{4/3}}, \quad (135)$$

gdzie  $\mu_j$  jest średnim ciężarem molekularnym gazu jąder,  $T_9 = T/10^9 \text{K}$  i  $\rho_6 = \rho/10^6 \text{gcm}^{-3}$ . W białych karłach, poza cienką warstwą zewnętrzną, mamy  $\mu_j \approx 14$  (głównie C i O),  $\rho_6 \sim 1$  i  $T_9 \ll 1$ , a więc zachodzi  $p_j/p_e \ll 1$ . Tak więc jeśli efekty relatywistyczne są do zaniedbania, to strukturę wewnętrzną białego karła

opisuje w przybliżeniu politropa  $n = 1.5$ . Z równań (56) i (134) dostajemy, po podstawieniu stałych,

$$\frac{R}{R_\odot} = 1.25 \times 10^{-2} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3}. \quad (136)$$

W granicy ultrarelatywistycznej ( $v \rightarrow c$ ) mamy

$$p_x v_x = \frac{c|\mathbf{p}|}{3}.$$

Teraz po całkowaniu mamy

$$p_e = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4$$

i eliminując  $p_F$  dostajemy

$$p_e = K \rho^{4/3} \quad \text{z} \quad K = \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{8} \left( \frac{1+X}{2m} \right)^{4/3}. \quad (137)$$

Dla  $X = 0$  mamy teraz  $K = 4.89 \times 10^{14}$ . W tym przypadku mamy strukturę politropową z  $n = 3$ . Masa takiego obiektu (*masa Chandrasekhra*) wynosi  $M_{Ch} = 1.459$  (por. zadanie na końcu rozdz. 2) i wyznacza nieosiągalne maksimum masy gwiazdy zbudowanej z gazu zdegenerowanych elektronów i niezdegenerowanych jąder atomowych.

Dla obliczeń realistycznych modeli gwiazd potrzebne są nam zależności termodynamiczne dla gazu elektronowego, który jest tylko częściowo zdegenerowany i umiarkowanie relatywistyczny. To drugie oznacza, że na pęd elektronu powinniśmy używać wyrażenia

$$\mathbf{p} = \frac{m_e \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (|\mathbf{v}|/c)^2}}, \quad (138)$$

a na energię kinetyczną

$$E_e = m_e c^2 \left[ \left( 1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] = m_e c^2 \left( \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m_e^2 c^2}} - 1 \right). \quad (139)$$

Rozkład pędów częściowo zdegenerowanego gazu elektronowego opisuje *statystyka Fermiego-Diraca*

$$dN_e(|\mathbf{p}|) = \frac{8\pi}{h^3} |\mathbf{p}|^2 \frac{1}{1 + \exp(E_e/kT - \psi)} d|\mathbf{p}|, \quad (140)$$

gdzie  $\psi$  jest *parametrem degeneracji*, do wyznaczenia w funkcji  $T$  i  $\rho$ . Mamy teraz

$$\frac{\rho(1+X)}{2m} = N_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|}{1 + \exp(E_e/kT - \psi)}. \quad (141)$$

$$p_e = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}|^3 v d|\mathbf{p}|}{1 + \exp(E_e/kT - \psi)}. \quad (142)$$

Energia wewnętrzna gazu elektronowego na gram dana jest wyrażeniem

$$u_e = \frac{8\pi}{h^3 \rho} \int_0^\infty \frac{E_e |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|}{1 + \exp(E_e/kT - \psi)}. \quad (143)$$

Równania (138-143) dają wystarczającą podstawę do wyliczenia – z uwzględnieniem efektów relatywistycznych i kwantowych – wszystkich potrzebnych wielkości termodynamicznych dla doskonałego gazu elektronowego. Sposób jest jednak dość zawiły. Rozpatrzmy przypadki graniczne, zaczynając od pełnej degeneracji.

Przypadek pełnej degeneracji odpowiada granicy

$$\psi \rightarrow \infty \text{ i } T \rightarrow 0.$$

Mamy wtedy

$$\frac{1}{1 + \exp(E_e/kT - \psi)} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } E_e < \psi kT \\ 0 & \text{jeżeli } E_e > \psi kT \end{cases}. \quad (144)$$

Wyliczymy  $p_e$  dla tego przypadku. Wprowadzamy oznaczenia

$$x \equiv \frac{|\mathbf{p}|}{m_e c} \quad \text{ i } \quad x_F \equiv \frac{p_F}{m_e c}$$

i korzystamy z równości

$$|\mathbf{v}| = \frac{cx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Wynik prostego całkowania (141) można teraz zapisać jako

$$\rho = \frac{16\pi m_e^3 m c^3}{3h^3(1+X)} x_F^3. \quad (145)$$

Ze (142) z wykorzystaniem (144) dostajemy na ciśnienie

$$p_e = \frac{\pi c^5 m_e^4}{3h^3} \mathcal{I}_1, \quad (146)$$

gdzie

$$\mathcal{I}_1 = 8 \int_0^{x_F} \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x_F(2x_F^2 - 3)\sqrt{1+x_F^2} + 3 \ln(x_F + \sqrt{1+x_F^2}),$$

a ze (143) następujące jawne wyrażenie na energię wewnętrzną

$$u_e = \frac{\pi c^5 m_e^4}{3h^3 \rho} \mathcal{I}_2, \quad (147)$$

gdzie

$$\mathcal{I}_2 = 24 \int_0^{x_F} (\sqrt{1+x^2} - 1)x^2 dx = 8x_F^3(\sqrt{1+x_F^2} - 1) - \mathcal{I}_1.$$

W granicy nierelatywistycznej mamy

$$x_F \rightarrow 0, \mathcal{I}_1 \rightarrow \frac{8}{5}x_F^5, \mathcal{I}_2 \rightarrow \frac{12}{5}x_F^5,$$

a w granicy ultrarelatywistycznej mamy

$$x_F \rightarrow \infty, \mathcal{I}_1 \rightarrow 2x_F^4, \mathcal{I}_2 \rightarrow 6x_F^4.$$

Skąd wynikają, otrzymane już wcześniej, zależności politropowe między  $p_e$  i  $\rho$ . O wielkości poprawek relatywistycznych decyduje parametr  $x_F$ . Gdy  $X = 0$ , mamy

$$x_F = 7.87 \times 10^{-3} \rho^{1/3} \quad (148)$$

*zadanie:* Proszę, wyznaczyć górną granicę masy zimnego białego karła, którego strukturę można przybliżać politropą  $n = 1.5$ . Jako kryterium przyjąć względny błąd ciśnienia  $\Delta p/p \leq 0.05$  w całym wnętrzu. Zakładamy  $X = 0$ , całkowitą jonizację i zaniedbujemy ciśnienie gazu jąder atomowych.

Przypadek częściowej degeneracji rozważymy w nierelatywistycznej granicy. W równaniach (141-143) kładziemy więc

$$E_e = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m_e} \text{ i } |\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{p}|}{m_e}.$$

Definiujemy *całki Fermiego-Diraca* wzorem

$$F_n(\psi) \equiv \int_0^\infty \frac{y^n}{1 + \exp(y - \psi)} dy \quad (149)$$

i dostajemy

$$\rho = \frac{8\pi m (2m_e kT)^{3/2}}{h^3(1+X)} F_{1/2}(\psi) \quad (150)$$

i

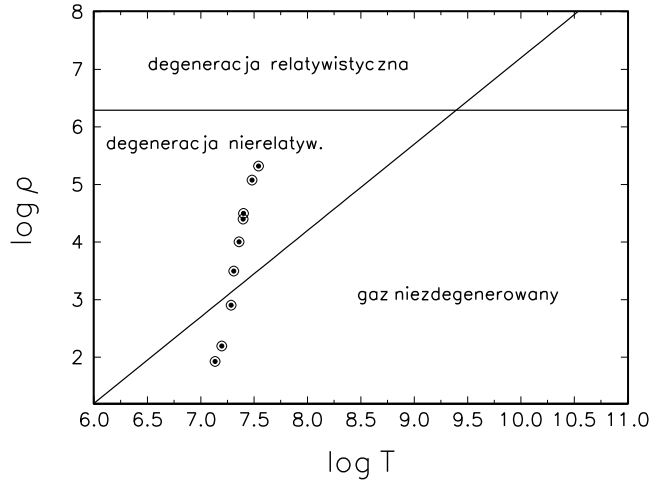
$$p_e = \frac{4\pi (2m_e kT)^{5/2}}{h^3 m_e} F_{3/2}(\psi). \quad (151)$$

Energię mamy, podobnie jak dla gazu niezdegenerowanego,

$$u_e = \frac{3}{2} \frac{p_e}{\rho} \quad (152)$$

Zauważmy, że parametr degeneracji zależy od parametrów termodynamicznych tylko poprzez  $\rho(1+X)/T^{3/2}$ . Granica gazu niezdegenerowanego odpowiada  $\psi \rightarrow -\infty$ . Wtedy jedynkę w mianowniku wzoru (140) można zaniedbać. Rozkład Fermiego-Diraca przechodzi w rozkład Maxwella-Boltzmanna. Z porównania ze wzorem (117) wynika, że w tej granicy mamy

$$e^\psi \rightarrow \frac{h^3(1+X)\rho}{4m(2\pi m_e kT)^{3/2}}.$$



Rysunek 5: Obszary degeneracji na diagramie  $\rho - T$  dla gazu bezwodorowego  $X$ . Linia diagonalna odpowiada w (153), a linia horyzontalna odpowiada  $x_F = 1$  w równaniu (148). Symbole  $\odot$  odpowiadają parametrom centralnym modeli gwiazdy populacji I z  $M = 1M_\odot$  w ciągu pierwszych 12 miliardów jej ewolucji. Pierwsze trzy modele znajdują się w fazie ciągu głównego.

Stąd wniosek, że efekty degeneracji są zaniedbywalne, jeśli

$$\frac{\rho(1+X)}{T^{3/2}} \ll C_{\text{deg}} \equiv \frac{4m(2\pi m_e k)^{3/2}}{h^3} = 1.6 \times 10^{-8} \text{ c.g.s.K..} \quad (153)$$

Wyrażenia termodynamiczne dla gazu złożonego z częściowo zdegenerowanych elektronów i niezdegenerowanych nukleonów otrzymujemy z

$$p_g = p_j + p_e \text{ i } u_g = u_j + u_e,$$

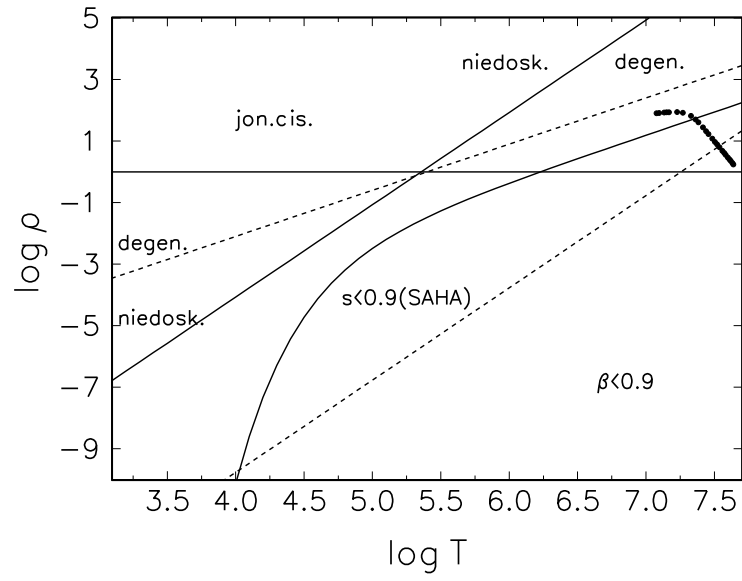
gdzie

$$p_j = \frac{kT\rho}{m} (X + 0.25Y) \text{ i } u_j = \frac{p_j}{3\rho}.$$

*Zadanie:* Proszę wyprowadzić wyrażenia na  $\Gamma_1$  i  $\nabla_{\text{ad}}$  dla gazu złożonego z całkowicie zdegenerowanych elektronów i niezdegenerowanych jąder. Uprościć wzory dla granicy nie- i ultra- relatywistycznej.

## 5.6 Klasyczny gaz niedoskonały

Przybliżenie gazu doskonałego polega na zaniedbaniu oddziaływań między cząsteczkami w energii wewnętrznej. Oddziaływania elektrostatyczne wnoszą istotny wkład do energii, gdy typowa odległość między jonami  $D$  jest na tyle



Rysunek 6: Obszary stosowalności różnych uproszczeń a diagramie  $\rho - T$  dla wodoru. Na lewo od linii  $\beta = p_g/p = 0.9$  wkład ciśnienia promieniowania jest zaniedbywalny. Na prawo od linii  $s$  (stopień jonizacji)=0.9 i powyżej  $\log \rho = 0$  wodór jest zjonizowany. Powyżej ciągłej linii diagonalnej istotne są efekty oddziaływań elektrostatycznych. Powyżej przerywanej linii diagonalnej istotna jest degeneracja wolnych elektronów. Kropki odpowiadają centralnym parametrom modeli gwiazd populacji I wieku zero, o masach od  $0.85$  do  $100M_{\odot}$ .

mała, że

$$\Gamma_c \equiv \frac{Z^2 e^2}{DkT} \sim 1,$$

gdzie  $Ze$  jest reprezentatywnym ładunkiem elektrostatycznym jąder. Ocenę odległości  $D$  daje promień sfery Wignera-Seitza,  $r_{\text{WS}}$ , wyznaczony równaniem

$$\frac{4\pi r_{\text{WS}}^3}{3} = \frac{1}{N_j} = \frac{m\mu_j}{\rho}.$$

$N_j$  oznacza ilość jonów w jednostce objętości. Jeżeli gaz składa się wyłącznie z wodoru, to linię ograniczającą obszar stosowalności przybliżenia gazu doskonałego na diagramie  $\rho - T$  wyznacza równanie

$$\rho = 8.5 \times 10^{-17} \Gamma_c^3 T^3. \quad (154)$$

W warunkach niskich temperatur i wysokich gęstości następuje *krystalizacja materii*. Efekt ten jest istotny dla zimnych białych karłów. Oszacowanie daje wartość  $\Gamma_c \approx 170$ , przy której następuje krystalizacja.

Równanie Sahy (120) dobrze opisuje stan jonizacji tylko dla odpowiednio niskich gęstości. Jeżeli odległości między atomami stają się porównywalne z ich rozmiarami, to dochodzi do jonizacji niezależnie od temperatury (atomy w metalach są zjonizowane w temperaturach pokojowych). Efekt ten nosi nazwę *jonizacji ciśnieniowej*. Dla gazu wodorowego ocenę gęstości, przy której ona zachodzi daje równość

$$r_{\text{WS}} = \text{promień Bohra} = 5 \times 10^{-9} \text{ cm},$$

co odpowiada

$$\rho \approx 1 \text{ g cm}^{-3}.$$

Uwzględnienie efektów oddziaływań między cząsteczkami gazu w równaniu stanu wymaga skomplikowanych obliczeń numerycznych. W modelowaniu gwiazd korzysta się obecnie najczęściej z tablic OPAL, w których wszystkie potrzebne wielkości termodynamiczne są stabilizowane w funkcji parametrów  $T$  i  $\rho/T^3$  dla różnych składów chemicznych. Tablice te są wynikiem obliczeń opartych na *modelu fizycznym*, w którym elementami są elektrony (związane lub wolne) i nukleony. Dostępne są również tablice MHD, wynik obliczeń opartych na *modelu chemicznym*, w którym elementami gazu są elektrony i jony.

## 5.7 Neutronizacja

We wnętrzach gwiazd neutronowych gęstość materii przekracza gęstość materii jądrowej wynoszącą ok.  $2 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . W tych warunkach jądra atomowe rozpadają się na swobodne nukleony. Znaczące ilości swobodnych neutronów mogą występować już przy przekroczeniu gęstości  $1.2 \times 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ , co odpowiada energii Fermiego  $E_F = p_F^2/2m_e = c^2(m_n - m_p - m_e)$ . Przy takich gęstościach swobodny neutron nie rozpada się (charakterystyczny czas rozpadu neutronu w

normalnych warunkach wynosi 11 min), bo poziomy energetyczne z  $E_e < E_F$  są zajęte.

Względne obfitości neutronów wyznacza równowaga rozpadów  $\beta$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

i procesów odwrotnych

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e.$$

Przy gęstościach  $\sim 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  protony i neutrony są już zdegenrowane. Ze wzrostem gęstości rośnie względna obfitość neutronów.

Pierwsze modele gwiazd neutronowych (Oppenheimer i Volkoff, 1939) były konstruowane przy założeniu równania stanu dla nierelatywistycznych fermionów,  $p \propto \rho^{5/3}$ , z wykorzystaniem relatywistycznego warunku równowagi hydrostatycznej (11). Rozwiązania istniały tylko dla mas w zakresie  $M = 0.2 - 0.76M_\odot$ . Wyznaczone promienie gwiazd znalazły się w zakresie, odpowiednio  $R = 26 - 9 \text{ km}$ . Dla porównania promień białego karła o masie  $0.76M_\odot$  jest równy  $0.0115R_\odot = 8000 \text{ km}$ . Ta ogromna różnica wynika przede wszystkim ze stosunku mas neutronu i elektronu. Stosując wzór (134) do gwiazd neutronowych należy zastąpić  $m_e$  przez  $m_n$ .

Oppenheimer i Volkoff pominęli nieznane wtedy efekty oddziaływań jądrowych, tworzenie hiperonów i pionów. Dotąd nie mamy dobrej teorii budowy materii o gęstościach przekraczających  $2 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . Różne współczesne równania stanu prowadzą do górnego ograniczenia na masę gwiazdy neutronowej w przedziale  $1.5 - 2.5M_\odot$ . Dobrze wyznaczone obserwacyjnie masy mieszczą się w granicach  $1.32 - 1.44M_\odot$ . Są więc niższe od wszystkich współczesnych górnych ograniczeń, ale wyraźnie wyższe od historycznej wartości masy maksymalnej. Różne równania stanu prowadzą do zbliżonych promieni i centralnych gęstości gwiazd neutronowych  $R = (11 \pm 1) \text{ km}$  i  $\rho_c \approx 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ .