2 Modele politropowe

Modele gwiazd, w których ciśnienie i gęstość spełniają zależność

$$p = K\rho^{1+1/n}, \tag{47}$$

w której K i n (indeks politropy) są stałymi, nazywamy modelami politropowymi, lub krócej politropami. Modele te odegrały ważną rolę w teorii budowy gwiazd i nadal mają nie tylko historyczne znaczenie. W tym rozdziale stosuję przeważnie tradycyjne oznaczenia. Równanie (47) można interpretować dwojako, albo jako przybliżenie równania stanu, albo jako przybliżenie opisujące strukturę gwiazdy. Pierwsza interpretacja ma zastosowanie w modelowaniu gwiazd zbudowanych z materii zdegenerowanej, druga w modelowaniu obszarów konwektywnych różnych gwiazd. Jeżeli w tym drugim przypadku stosuje się równanie stanu (18), to temperatura dana jest przez

$$T = K\rho^{\frac{1}{n}}\frac{\mu m}{k}$$

2.1 Równanie Lane'a–Emdena

Podstawienie

$$\rho = \rho_c\theta^n \quad \text{i} \quad p = K\rho_c^{1+1/n}\theta^{n+1} \tag{48}$$

pozwala na sprowadzenie równań (4-6) do równania drugiego rzędu na $\theta(r)$. Wpierw z (4) i (5) dostajemy

$$M_r = -(n+1)\frac{K\rho_c^{1/n}}{G}r^2\frac{d\theta}{dr}, \tag{49}$$

a następnie podstawiamy to wyrażenie do różniczkowej wersji równania (6) i po prostych przekształceniach dostajemy

$$\frac{n+1}{4\pi G}K\rho_c^{1/n-1}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) + \theta^n = 0.$$

Wprowadzając nową zmienną niezależną ξ zdefiniowaną wzorem

$$r = \xi\sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G}\rho_c^{1/n-1}}, \tag{50}$$

dostajemy równanie

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^n = 0 \tag{51}$$

które nazywa się *równaniem Lane'a–Emdena*. Dla $\xi = 0$ mamy $\theta = 1$ (z definicji) i $\frac{d\theta}{dr} = 0$ (bo $M_0 = 0$. Bez trudu znajdujemy rozwinięcie potęgowe $\theta(\xi)$, dające dobre przybliżenie rozwiązania w pobliżu $\xi = 0$.

$$\theta_n = 1 - \frac{\xi^2}{6} + n\frac{\xi^4}{120} - .... \tag{52}$$

Poza szczególnymi przypadkami $n = 0$ (ciecz nieściśliwa), $n = 1$ i 5, pełne rozwiązanie można otrzymać jedynie liczbowo. Promień gwiazdy politropowej wyznacza pierwsze miejsce zerowe funkcji $\theta(\xi)$. Tę wartość ξ oznacza się ξ_1 i nazywa promieniem politropy. W wymienionych przypadkach mamy, odpowiednio,

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \frac{\xi^2}{6}, \qquad \xi_1 = \sqrt{6} \qquad \text{dla } n = 0, \\ \theta &= \frac{\sin\xi}{\xi}, \qquad \xi_1 = \pi \qquad \text{dla } n = 1 \text{ i} \\ \theta &= \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2/3}}, \qquad \xi_1 = \infty \text{ dla } n = 5. \end{aligned}$$

Modele o skończonych promieniach istnieją tylko dla $n < 5$.

Zauważmy, że problem brzegowy dany równaniami (8-10) z warunkiem (47) został sprowadzony do problemu początkowego, który dla danego K i $n \leq 5$ ma jednoznaczne rozwiązania.

2.2 Właściwości modeli politropowych

Tablica 1: Parametry funkcji Lane'a-Emdena

n	ξ_1	$(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi})_1$	λ
0.5	2.75	3.79	1.84
1.0	3.14	3.14	3.29
1.5	3.65	2.71	5.99
2.0	4.35	2.41	11.40
2.5	5.36	2.19	23.41
3.0	6.90	2.02	54.19
3.5	9.54	1.89	152.89
4.0	14.97	1.80	622.43
4.5	31.84	1.74	6188.51

Po znalezieniu $\theta_n(\xi)$ można wyznaczyć parametry fizyczne modelu. Na ogół, parametry te zależą od wartości n, od K i ρ_c. Z równania (50) dostajemy od razu,

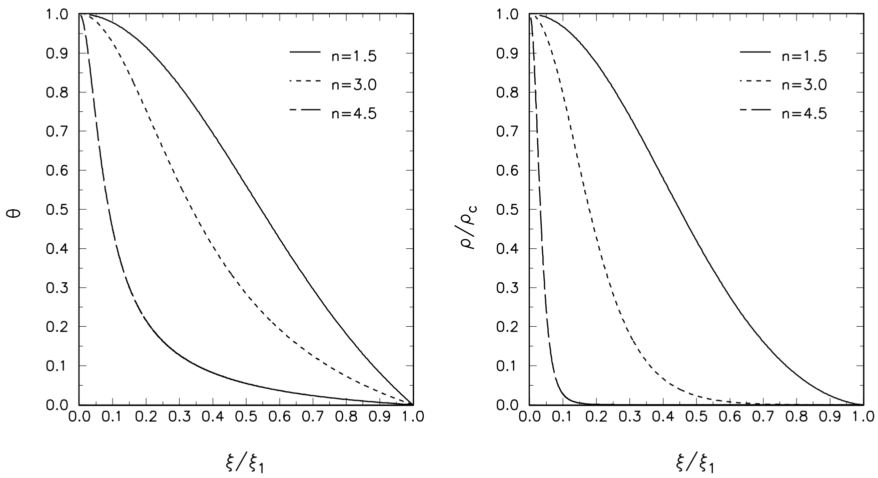
$$R = \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} K^{\frac{1}{2}} \xi_1 a_n, \tag{53}$$

gdzie

$$a_n = \sqrt{\frac{n+1}{4\pi G}}.$$

Równanie (49) prowadzi do następującego wyrażenie na masę gwiazdy

$$M = 4\pi \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} K^{\frac{3}{2}} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_1 a_n^3. \tag{54}$$



Rysunek 1: Funkcje Lane'a-Emdena i przebiegi względnej gęstości w modelach politropowych o różnych wartościach wykładnika n.

Zauważmy, że parametr mierzący stopień koncentracji materii w gwieździe, $\lambda = \rho_c/\bar{\rho}$, zależy tylko od n. Mamy bowiem

$$\lambda = \frac{4\pi\rho_c R^3}{3M} = \frac{\xi_1}{3}\left(-\frac{d\theta}{d\xi}\right)_1^{-1} \tag{55}$$

Funkcja $\lambda(n)$ jest monotonicznie rosnąca. Dla $n \to 5$, $R \to \infty$ i $\lambda \to \infty$, ale M pozostaje skończone. Wartość $n = 5$ jest graniczna. Przy $n > 5$, funkcja Lane'a-Emdena nie ma miejsc zerowych.

Przypadek izotermicznej struktury zbudowanej z gazu doskonałego opisuje zależność politropowa z $n \to \infty$. Taki obiekt nie może znajdować się w równowadze hydrostatycznej.

Eliminując ρ_c z równań (53) i (54) można znaleźć *zależność Masa–Promień* dla politrop. Przy ustalonych K i n, mamy

$$R = M^{\frac{n-1}{n-3}} K^{\frac{n}{3-n}} \xi_1 \left[4\pi\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_1\right]^{\frac{n-1}{3-n}} a_n^{\frac{2n}{3-n}} \tag{56}$$

Zauważmy, że przy ustalonym K promień politropy jest malejącą funkcją jej masy w przedziale $n \in (1, 3)$. Interesująca jest wartość $n = 3$. Mamy wtedy $dM/d\rho_c = 0$, co oznacza że z równaniem stanu danym przez (47) nie można skonstruować modelu gwiazdy o dowolnej masie.

W przypadku innych barotropowych równań stanu, $p = p(\rho)$, konstruuje się ciągi modeli dla parametru ρ_c całkując równania (8) i (9) (lub 11 w przypadku relatywistycznym) od $M_r = 0$ do pierwszego miejsca zerowego ρ. Wartości M_r i r w tym punkcie wyznaczają promień i masę gwiazdy. Ekstrema funkcji $M(\rho_c)$ są punktami przejścia od konfiguracji stabilnych do niestabilnych.

Dla gwiazd politropowych mamy prosty wzór na energię grawitacyjną.

$$\mathcal{W} = -\frac{3}{(5-n)} \frac{GM^2}{R}, \tag{57}$$

Najłatwiej ten wzór uzyskamy, korzystając z pierwszej równości w równaniu (7),

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int_0^M \Phi dM_r.$$

Wyrażenie na Φ dostaniemy podstawiając zależność politropową (47) do warunku równowagi hydrostatycznej (4). Skąd

$$\frac{d}{dr} \left(\Phi + (n+1) \frac{p}{\rho} \right) = 0,$$

a po scałkowaniu z warunkiem $p(R) = 0$

$$\Phi = -\frac{GM}{R} - (n+1)\frac{p}{\rho}.$$

W ten sposób dostajemy

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{2}\frac{GM^2}{R} - \frac{n+1}{2} \int_0^M \frac{p}{\rho} dM_r.$$

Natomiast z równania (16) mamy

$$\mathcal{W} = -3 \int_0^M \frac{p}{\rho} dM_r.$$

Wzór (57) wynika bezpośrednio z połączenia tych dwóch ostatnich wzorów.

Zadania

1. Proszę sprawdzić, że $\theta = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$ jest rozwiązaniem równania Lame'a-Emdena dla $n = 5$, oraz wyliczyć wartości ξ odpowiadające sferom wewnątrz których znajduje się 50%, 90% i 99% masy gwiazdy.

2. Masa politropy $n = 3$ jest wyznaczona jednoznacznie przez wartość K. Równanie stanu dla całkowicie i ultrarelatywistycznie zdegenerowanego gazu nie zawierającego wodoru ma postać

$$p = K\rho^{\frac{4}{3}} \qquad \text{z} \qquad K = \frac{hc}{16m} \left(\frac{3}{2\pi m} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Proszę wyznaczyć w jednostkach $M_\odot$ masę gwiazdy zbudowanej z takiego gazu, zaniedbując efekty relatywistczne w warunku równowagi mechanicznej. W obliczeniach proszę posłużyć się Tabelą 1 i Dodatkiem.