

6 Transport energii przez promieniowanie i przewodnictwo we wnętrzach gwiazd

6.1 Przybliżenie dyfuzyjne dla promieniowania

Podstawową wielkością dla opisu promieniowania jest jego monochromatyczne natężenie, $I_\nu(\theta)$. Wielkość $I_\nu(\theta)d\nu d\Sigma dt d\varpi$ przedstawia energię promieniowania w przedziale częstotliwości $\nu \pm d\nu$, które przepływa przez element powierzchni $d\Sigma$, w czasie dt i jest skierowane w kąt bryłowy $d\varpi$ wokół osi tworzącej kąt θ z normalną do tej powierzchni. Dla uproszczenia, nie wypisuję tu w sposób jawny zależności I_ν od miejsca i czasu.

Z definicji I_ν wynika następujący wzór na gęstość energii monochromatycznych fotonów liczoną na jednostkę częstotliwości.

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{1}{c} \oint d\varpi I_\nu(\theta), \quad (155)$$

w którym czynnik $1/c$ pojawił się z racji zamiany czasu dt na wysokość dz elementu objętości $dz d\Sigma$. Całkowita gęstość energii promieniowania dana jest przez

$$E_{\text{rad}} = \int_0^\infty \mathcal{E}_\nu d\nu. \quad (156)$$

Monochromatyczny strumień energii promieniowania na jednostkę częstotliwości i powierzchni wyliczymy biorąc pod uwagę promieniowanie docierające z całej otaczającej sfery, całkując po kącie bryłowym,

$$\oint d\varpi = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu,$$

oraz uzględniając czynnikiem $\mu \equiv \cos \theta$ kąt jaki tworzy kierunek promieniowania z normalną do powierzchni. Tak dostajemy

$$\mathcal{F}_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) \mu d\mu. \quad (157)$$

Całkowity strumień energii promieniowania przepływający przez jednostkę powierzchni dany więc jest przez

$$F_{\text{rad}} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu. \quad (158)$$

Dla gwiazd sferycznych będziemy używali wielkości

$$L_{\text{rad},r} = 4\pi r^2 F_{\text{rad}}$$

, oznaczającej całkowity strumień energii przenoszony na drodze promieniowania przez sferę o promieniu r wokół centrum.

Ciśnienie promieniowania wyliczymy rozważając strumień pędu niesiony przez fotony napływające ze wszystkich kierunków i przepływające przez jednostkę

powierzchni. Energia fotonów dana jest przez $h\nu$, a składowa normalna pędu przez $h\nu\mu/c$. Dlatego wzór na ciśnienie dostaje się w podobny sposób jak wzór na strumień energii, uwzględniając jedynie dodatkowy czynnik μ/c do I_ν . W ten sposób mamy

$$p_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 \int_0^\infty I_\nu(\theta) d\nu \mu^2 d\mu. \quad (159)$$

We wnętrzach gwiazdowych promieniowanie jest w bardzo bliskie lokalnej równowagi termodynamicznej z gazem. W przybliżeniu zatem, rozkład natężenia jest izotropowy, a zależność od natężenia od częstotliwości dana jest *funkcją Plancka*.

$$I_\nu = \mathcal{B}_\nu(T) \equiv \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (160)$$

Wzór ten uzyskać można z *rozkładu Bosego* dla cząstek o zerowym potencjale chemicznym. Z tym wyrażeniem dostajemy, kolejno ze (155-156) i (159),

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{4\pi}{c} \mathcal{B}_\nu, \quad (161)$$

$$E_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \mathcal{B}_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} B(T) = aT^4 = u_{\text{rad}}\rho, \quad (162)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$a \equiv \frac{4\sigma_B}{c} = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1},$$

i

$$p_{\text{rad}} = \frac{aT^4}{3}. \quad (163)$$

Wzory (162) i (163), są zgodne ze wzorem (124) z poprzedniego rozdziału. Wielkość a nazywa się *stałą promieniowania*, a σ_B *stałą Stefana-Boltzmann*.

Z izotropii I_ν wynika $\mathcal{F}_\nu = 0$. Niezerową wartość dostaniemy uwzględniając niewielką anizotropowość pola promieniowania. W tym rozdziale nie będziemy jednak jej wyliczali, a dla wyprowadzenia wzoru na \mathcal{F}_ν skorzystamy z równania dyfuzji. Jego stosowalność uzasadnia droga swobodna fotonu we wnętrzach gwiazdowych, przeważnie znacznie krótsza od od temperaturowej skali odległości, $H_T = |dr/d\ln T|$. Ogólne równanie dyfuzji (*prawo Ficka*) zapiszemy w postaci.

$$\mathbf{f}_C = -\mathcal{D}\nabla C. \quad (164)$$

\mathbf{f}_C oznacza tu strumień czegoś, C gęstość tego samego, a \mathcal{D} współczynnik dyfuzji, który wyraża się wzorem

$$\mathcal{D} = \frac{v_p \ell_p}{3}, \quad (165)$$

w którym v_p jest średnią prędkością cząstek przenoszących, a ℓ_p ich drogą swobodną, która wiąże się z przekrojem czynnym na ich oddziaływanie z innymi cząstkami, ς_p , wzorem $\ell_p = (N\varsigma_p)^{-1}$, gdzie N jest liczbą tych cząstek na 1cm^3 . Częściej, zamiast ς_p będziemy używać współczynnika nieprzezroczystości 1g gazu, $\kappa_p = N\varsigma_p/\rho$.

Dla energii fotonów z przedziału $\nu, \nu + d\nu$ mamy

$$f_{C,r} = \mathcal{F}_\nu, \quad v_p = c, \quad \ell_p = \frac{1}{\kappa_\nu \rho}, \quad C = \mathcal{E}_\nu, \quad (166)$$

gdzie κ_ν oznacza monochromatyczny współczynnik nieprzezroczystości obejmujący łącznie absorpcję i rozpraszanie. O wyliczaniu κ_ν będzie mowa w podrozdziale 6.3. W naszym zastosowaniu mamy więc

$$\mathcal{F}_\nu = -\frac{c}{3\kappa_\nu \rho} \frac{d\mathcal{E}_\nu}{dr} = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu \rho} \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dT} \frac{dT}{dr}. \quad (167)$$

Inną drogę do tego równania poznamy w następnym rozdziale.

Po podstawieniu do (158) wyrażenia (167) na \mathcal{F}_ν i skorzystaniu ze (162), dostaniemy

$$F_{\text{rad}} = -\frac{4acT^3}{3\kappa_R \rho} \frac{dT}{dr}. \quad (168)$$

Wprowadziliśmy tu *średni współczynnik nieprzezroczystości Rosselanda*, κ_R , zdefiniowany wzorem

$$\frac{1}{\kappa_R} = \left(\frac{dB}{dT} \right)^{-1} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dT} d\nu, \quad (169)$$

gdzie

$$B \equiv \int_0^\infty \mathcal{B}_\nu d\nu = \frac{acT^4}{4\pi}. \quad (170)$$

6.2 Całkowity mikroskopowy strumień ciepła

W zastosowaniu do przewodnictwa prawo Ficka prowadzi do następującego wzoru na strumień energii.

$$F_{\text{mol}} = -\mathcal{D}_e c_v \frac{dT}{dr}, \quad (171)$$

z $\mathcal{D}_e = v_e \ell_e / 3$. Przewodnictwo jest zwykle mniej wydajną formą transportu energii niż transfer promieniowania ($v_e \ll c$, $\ell_e \ll 1/\kappa_R \rho$). Jest ono istotne jedynie w obszarach degeneracji elektronów. Typową sytuacją jest to, że w energii wewnętrznej i ciśnieniu dominuje gaz, a w strumieniu ciepła promieniowanie.

Równania (168) i (171) można połączyć w następujące równanie na całkowity mikroskopowy strumień energii przepływającej przez sferę w odległości r od centrum gwiazdy.

$$L_r = -\frac{16\pi a c r^2 T^3}{3\kappa \rho} \frac{dT}{dr}, \quad (172)$$

gdzie

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_R} + \frac{3\mathcal{D}_e c_v \rho}{4acT^3}.$$

Warunek równowagi cieplnej warstwy, w której brak wewnętrznych źródeł ciepła i nie występuje makroskopowy przepływ materii, przyjmuje prostą postać, $L_r = \text{const.}$, lub - gdy nie zakładamy symetrii sferycznej -

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (173)$$

gdzie

$$\mathbf{F} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \nabla T.$$

6.3 Współczynnik nieprzezroczystości

Zapominamy tu o przewodnictwie molekularnym i symbol κ będziemy rozumieć jako średni współczynnik nieprzezroczystości Rosselanda, który jest związany ze współczynnikiem monochromatycznym, κ_ν , wzorem (169). Jeżeli przez $\varsigma_{\nu,j}$ oznaczymy przekrój czynny na cząsteczkę dla określonego procesu (j) absorpcji lub rozpraszania fotonów o energii $h\nu$, to możemy napisać

$$\kappa_\nu = \frac{1}{\rho} \sum_j N_j \varsigma_{\nu,j}, \quad (174)$$

gdzie N_j oznacza ilość cząsteczek odpowiedzialnych za proces j w jednostce objętości.

6.3.1 Efekt Comptona

Przekrój czynny na rozpraszanie fotonów na elektronach opisany jest wzorem *Kleina-Nishiny*. Jeżeli prędkości elektronów można traktować jako nierelatywistyczne ($kT \ll m_e c^2$, co odpowiada $T \ll 6 \times 10^9 \text{K}$), to wzór redukuje się do postaci *Thompsona*

$$\varsigma_e = \frac{8r_e^2 \pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6.65 \times 10^{-24} \text{ cm}^2,$$

w której nie ma zależności od ν . Stąd, po skorzystaniu ze (174) i z założenia pełnej jonizacji pierwiatków ($N_e = (1 + X)\rho/2m$), dostajemy następujący prosty wzór na współczynnik nieprzezroczystości wynikający z rozpraszania na nierelatywistycznych elektronach

$$\kappa_e = 0.2(1 + X) \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}. \quad (175)$$

Ponieważ rozpraszanie jest tylko jednym z procesów ograniczających drogę swobodną, ℓ_p fotonów, to wynika stąd ważna nierówność

$$\ell_p < \frac{5 \text{ g cm}^{-3}}{\rho(1 + X)} \text{ cm}. \quad (176)$$

Zadanie: Źródłem nieprzezroczystości materii jest rozpraszanie na wolnych elektronach $\kappa_s = 0.2(1 + X)$ i absorpcja $\kappa_{a,\nu}(\rho, T, \mathbf{X})$. Proszę napisać wzór na średnią Rosselanda i podać jego wersję dla przypadków $\kappa_s \gg \kappa_{a,\nu}$ i $\kappa_s \ll \kappa_{a,\nu}$

6.3.2 Przejścia swobodno-swobodne

Niezwiązany elektron znajdujący się w polu elektrostatycznym jonu może pochłaniać i emitować fotony (*bremsstrahlung*, *promieniowanie hamowania*). W przypadku lokalnej równowagi termodynamicznej współczynniki przekrój czynny liczony na jeden jon i jeden elektron dany jest, w przybliżeniu, przez

$$\varsigma_{f-f,j} = \frac{C_{f-f} Z_j^2}{v_e \nu^3}, \quad (177)$$

gdzie C_{f-f} jest liczbą, Z_j ładunkiem jonu, a v_e prędkością elektronu. Wyrażenie na średni współczynnik nieprzezroczystości dla przejść swobodno-swobodnych otrzymany po zsumowaniu wkładów pochodzących od różnych jonów i elektronów, z v_e danym rozkładem Maxwella-Boltzmanna (119). Po uśrednieniu po ν według wzoru (160), dostaje się

$$\kappa_{f-f} \approx 4 \times 10^{22} (1 + X) \left(X + Y + \sum_{i>4} \frac{X_i Z_i^2}{\mathcal{A}_i} \right) \rho T^{-3.5} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}, \quad (178)$$

nazywany *prawem Kramersa dla przejść swobodno-swobodnych*.

6.3.3 Przejścia swobodno-związane

Przekrój czynny na fotojonizację liczony na jeden atom i jeden związany elektron (o głównej liczbie kwantowej n) dany jest, w przybliżeniu, wyrażeniem

$$\varsigma_{b-f,j,n} = \begin{cases} \frac{C_{b-f} Z_j^4}{n^5 \nu^3} & \text{jeżeli } h\nu \geq \Xi_{j,n} \\ 0 & \text{jeżeli } h\nu < \Xi_{j,n} \end{cases}, \quad (179)$$

gdzie $\Xi_{j,n}$ jest potencjałem jonizacji. Fotojonizacja wodoru i helu jest najważniejszym źródłem nieprzezroczystości w zewnętrznych warstwach gwiazd.

W zakresie temperatury od 4000 K - 6000 K, na przykład w atmosferze Słońca, dominującym źródłem nieprzezroczystości jest fotojonizacja ujemnego jonu wodorowego (H^-). Potencjał jonizacji wynosi 0.75 eV (potencjał jonizacji H wynosi 13.6 eV). Wolne elektrony pochodzą z obfitych pierwiastków o niskim potencjale pierwszej jonizacji: Na, K, Ca i Al.

Przy wyższych temperaturach, w κ dominują kolejno efekty jonizacji H, HeI i HeII. Nie mamy prostego wzoru na średni współczynnik nieprzezroczystości dla warstw, w których wodór hel nie są całkowicie zjonizowane. Wykładnik w zależności $\kappa(T)$ może tam osiągać duże dodatnie wartości, co wynika z szybkiego wzrostu z temperaturą liczby fotonów zdolnych do fotojonizacji i liczby elektronów, które neutralny wodór może przyłączyć.

Dla warstw głębszych, gdzie wodór i hel można uznać za całkowicie zjonizowane istnieje przybliżenie znane jako *prawo Kramersa dla przejść swobodno-związanych*

$$\kappa_{b-f} \approx 4 \times 10^{25} Z(1+X)\rho T^{-3.5} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}. \quad (180)$$

Podobnie jak we wzorze (178) cała zależność od parametrów termodynamicznych dana jest przez czynnik $\rho/T^{3.5}$.

6.3.4 Przejścia związane-związane

Do wczesnych lat sześćdziesiątych wartości κ były wyliczane z użyciem wzorów (175), (178) i (180), zaniebując efekty przejść związane-związanych, czyli absorpcji w liniach widmowych. Wyliczenie tych efektów jest najtrudniejsze. Nie istnieje tu żadne proste oszacowanie. Skomplikowane obliczenia numeryczne pokazały, że zaniebanie absorpcji w liniach metali prowadzi do znacznego zaniżenia nieprzezroczystości materii we wnętrzach gwiazd.

6.3.5 Nieprzezroczystości w niskich temperaturach

Poniżej $T = 4000\text{K}$ najważniejszy wkład do κ wnosi dysocjacja molekuł, przede wszystkim H_2 . W atmosferach czerwonych olbrzymów istotna jest też absorpcja i rozpraszanie promieniowania przez pył.

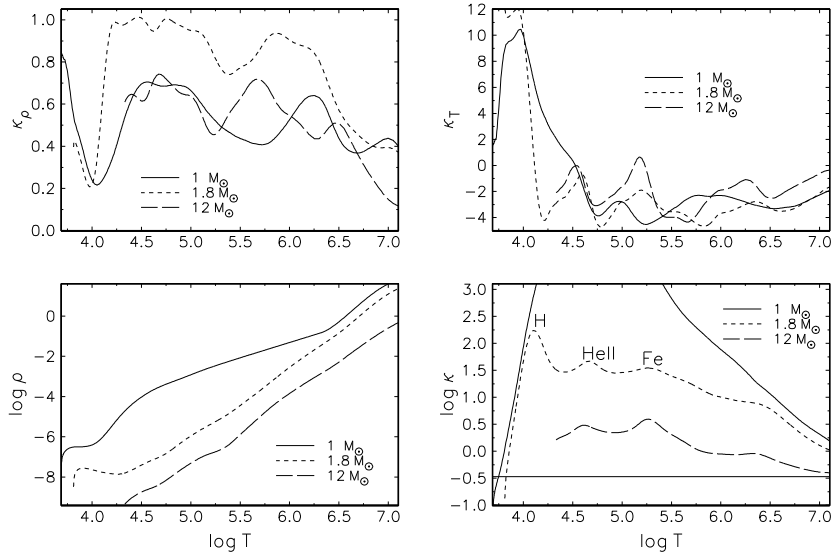
6.3.6 Tablice nieprzezroczystości

Numeryczne obliczenia współczynnika κ do zastosowań astrofizycznych z uwzględnieniem wszystkich efektów atomowych oraz przewodnictwa molekularnego prowadzone są przez wyspecjalizowane zespoły. Wyniki tych obliczeń dostępne są w formie tablic. Obecnie mamy do dyspozycji wyniki z dwóch niezależnych programów znanych jako OP i OPAL. Tylko w programie OPAL bierze się pod uwagę wpływ oddziaływań między atomami. Efekt ten jest ważny dla modeli Słońca i innych gwiazd o małych masach. Dla modeli gwiazd z $M > 8M_\odot$, wyniki uzyskane z OP i OPAL są różnią się tylko nieznacznie. Tablice κ w funkcji ρ i T dla rozmaitych składów chemicznych są dostępne w sieci pod adresem

<http://www.phys.llnl.gov/Research/OPAL/>.

Wcześniejsze obliczenia, w których uwzględniano absorpcję w liniach rezonansowych zaniżały wartość κ , w pewnym obszarze na diagramie $\rho-T$ o czynnik ≈ 3 . Dane OPAL i OP nie uwzględniają wpływu molekuł i pyłu. Dlatego dla liczenia modeli gwiazd o niskich T_{eff} potrzebne są dodatkowe tablice κ .

Na rysunku 7 pokazany jest przebieg nieprzezroczystości i jej pochodnych logarytmicznych względem gęstości i temperatury w otoczkach trzech wybranych gwiazd ciągu głównego.



Rysunek 7: W funkcji temperatury ($\log T$) wykreślone są wartości κ_ρ , κ_T , $\log \rho$ i $\log \kappa$ w otoczkach modeli gwiazd ciągu głównego. Model o masie $1M_\odot$ opisuje w przybliżeniu Słońce. Model o masie $1.8M_\odot$ gwiazdę typu δ Scuti, a model o masie $12M_\odot$ gwiazdę typu β Cephei. Trzy maksima κ_T odpowiedzialne są za wzbudzanie pulsacji w różnych typach gwiazd fizycznie zmiennych. Pierwsze związane z jonizacją H^- i H , następne z jonizacją $HeII$. Obydwa grają rolę w pulsacjach gwiazd w pasie Cefeid. Maksimum przy $\log T = 5.3$, efekt przejść związane-związanych głównie w atomach żelaza, było nieznane aż do początku lat dziewięćdziesiątych. Jest ono odpowiedzialne za pulsacje gwiazd typu β Cephei i innych gwiazd typu B. W żadnym z modeli nie widać obszaru nawet przybliżonej stosowalności praw Kramersa ($\kappa_\rho = 1$, $\kappa_T = -3.5$).