

## 15 Zaawansowane fazy ewolucji

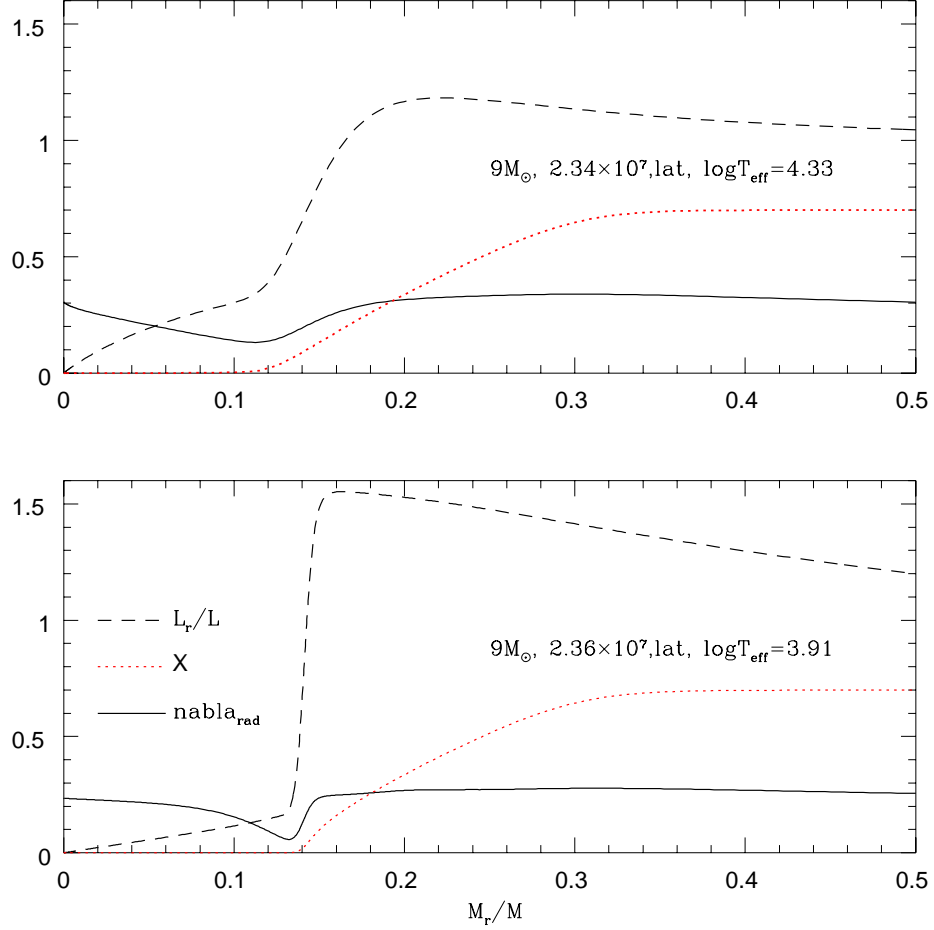
### 15.1 Granica Schönberga–Chandrasekhara

Po zakończeniu palenia wodoru, zanika źródło strumienia promieniowania w jądrze, które powinno stawać się izotermiczne. Wiemy, że gwiazda zbudowana z gazu doskonałego nie może być w całości izotermiczna. Na pytanie czy istnieją równowagowe konfiguracje z izotermicznym helowym jądrem odpowiedzieli Chandrasekhar i jego współpracownicy w pracach z lat 1941-42. Wnioskiem z ich obliczeń było górne ograniczenie na względną masę takiego jądra, które dziś nazywa się granicą *Schönberga–Chandrasekhara* i często oznacza  $q_{SC}$ . Ta wielkość bardzo mało zależy od parametrów gwiazdy i w przybliżeniu wynosi  $q_{SC} \approx 0.09$ . Po przekroczeniu tej granicznej wartości, w jądrze musi stworzyć się gradient temperatury i skierowany na zewnątrz strumień promieniowania. Jedynym dostępnym źródłem strumienia jest kontrakcja jądra w cieplnej skali czasowej.

*zadanie:* Napisać równania i schemat numerycznego prowadzące do wyliczenia  $q_{SC}$ , przyjmując, że model gwiazdy składa się z izotermicznego jądra ( $p \propto \rho$  i politropowej otoczki ( $p = K\rho^{1+1/n}$ ), oraz dopuszczając skok gęstości na granicy jądra o czynnik  $\alpha < 1$ . Wykonać obliczenia dla  $\alpha = 0.6$  oraz  $n = 0, 1.5$  i  $3$ .  
*Wskazówki:* Wyprowadzić odpowiednik równania Lane’a-Emdena dla konfiguracji izotermicznej. Skorzystać z warunku ciągłości promienia, masy i ciśnienia na granicy jądra. Jako parametr rodziny modeli złożonych wygodnie jest wybrać stosunek gęstości na granicy jądra do gęstości centralnej. Zmieniać go poczynając od wartości nieco poniżej jedności i stopniowo obniżać dopóki możliwa jest konstrukcja modelu.

Ułamek masy gwiazdy zawarty w izotermicznym jądrze przy końcu fazy ciągu głównego rośnie z całkowitą masą gwiazdy. Przy  $M = 1.2M_{\odot}$  wynosi mniej niż 0.05 i dopiero przy ok.  $5M_{\odot}$  przekracza  $q_{SC}$ , a więc tylko począwszy od takiej masy ewolucja przyspiesza gwałtownie zaraz po wypaleniu wodoru i postępuje w cieplnej skali czasowej. Dla gwiazd o mniejszych masach następuje z opóźnieniem. Przyspieszenie ewolucji wyjaśnia pochodzenie *przerwy Hertzsprunga* na diagramie H-R.

Fazę pomiędzy ciągiem głównym i początkiem syntezy węgla w jądrze, niezależnie od masy gwiazdy charakteryzują (i) przyrost masy i malenie promienia jądra helowego (ii) zmniejszanie masy warstwy leżącej nad jądrem w której zachodzi synteza helu (iii) ekspansja otoczki. Występują jednak istotne różnice pomiędzy gwiazdami o różnych masach. Część z nich zobaczymy porównując wykresy na rysunkach 15 i 16. Pierwszy z rysunków pokazuje przebieg niektórych parametrów we wnętrzu gwiazdy masywnej ( $M = 9M_{\odot}$ ) tuż po zakończeniu fazy ciągu głównego i w modelu bardziej zaawansowanym w ewolucji. Drugi rysunek pokazuje podobne zależności dla gwiazd o masie słonecznej. Najważniejsza różnica to znaczące odchylenie od równowagi cieplnej w przypadku gwiazdy masywnej. Chociaż większość energii produkowana jest w reakcjach jądrowych, to tempo ewolucji dyktuje kontrakcja jądra. Wyzwolona w nich energia jest zużywana w istotnej części na ekspansję otoczki.



Rysunek 15: Względna jasność,  $L_r/L$ , obfitość wodoru,  $X$  i gradient promienisty,  $\nabla_{\text{rad}}$ , w dwóch modelach gwiazdy o masie  $9M_{\odot}$ , po zakończeniu fazy syntezy He w jądrze. Należy zwrócić uwagę na znikomą różnicę między modelami w rozkładzie  $X(M_r)$ , przy znacznej różnicy w temperaturze efektywnej, na względnie krótki wpływ czasu dzielący modele, a także na zmiany w  $L_r$  związane z kurczeniem się jądra i ekspansją otoczki, chociaż głównym źródłem strumienia pozostają reakcje jądrowe zachodzące w dolnej części otoczki bogatej w wodor. W modelu starszym to źródło jest bardziej skoncentrowane i efektywne. Około połowy wyprodukowanej energii jest zużywane na ekspansję otoczki.

Dla gwiazd o masach początkowych mniejszych niż ok.  $2.3M_{\odot}$  wzrost gęstości w jądrze prowadzi, prędzej czy później, do degeneracji elektronów. Wtedy granica Schönberga–Chandrasekhara nie stosuje się i jądro izotermiczne może znajdować się w równowadze cieplnej. Tempo ewolucji może być rządzone szybkością reakcji jądrowych i na tyle powolne, że ekspansja otoczki pochłania znikomą część wyzwolanej energii.

## 15.2 Warstwy palenia wodoru

Wysoka temperatura sprawia, że nawet w przypadku gwiazd małowasywnych w tych warstwach spalanie wodoru zachodzi w cyklu CNO. W odróżnieniu od sytuacji na ciągu głównym, nie prowadzi to do niestabilności kowektywnej, bo maksimum  $\epsilon$  wypada przy skończonej wartości  $M_r$ . Gdy zdegenerowane jądro helowe otacza bardzo cienka warstwa palenia wodoru, to tę fazę ewolucji można opisywać jako proces samoregulującej się akrecji. Czynnikiem regulującym szybkość akrecji są reakcje jądrowe.

Ponieważ warstwa jest bardzo cienka, zmiany w  $X(M_r)$  zachodzą bardzo szybko. Powoduje trudności obliczeniowe, ale też uzasadnia założenie stacjonarności akrecji co pozwala na uproszczony opis zjawiska i wgląd w jego istotę.

Zaniedbując lolkana pochodną czasową mamy

$$\frac{dX}{dt} \approx v \frac{dX}{dr}, \quad (394)$$

gdzie  $v < 0$  oznacza prędkość przepływu materii przez warstwę. Zgodnie z przyjętym przybliżeniem, strumień masy skierowany do wewnątrz jest stały w obrębie warstwy i równy tempu wzrostu masy helowego jądra. Mamy więc

$$\frac{dM_{\text{He}}}{dt} = -4\pi r^2 \rho v \quad (395)$$

i z (394) w przyjętym przybliżeniu, dostajemy

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{dM_{\text{He}}}{dt} \frac{dX}{dM_r}. \quad (396)$$

Z drugiej strony, mamy związek (rów. 357,358 i 286)

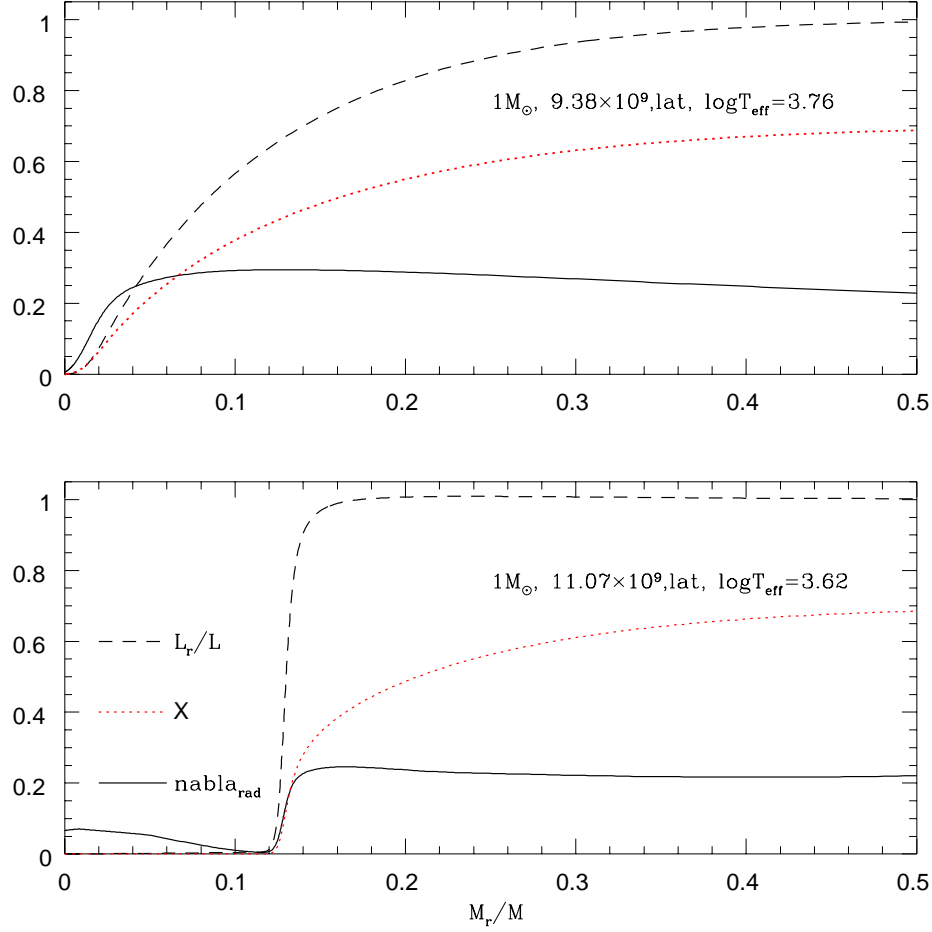
$$\frac{Q_{\text{eff,cno}}}{m} \frac{dX}{dt} = -\epsilon \quad (397)$$

oraz (rów.244)

$$\epsilon = \frac{dL_r}{dM_r} + vT \frac{dS}{dr} \quad (398)$$

Drugi człon reprezentuje ciepło wydzielane w wyniku przepływu materii. Korzystając z (395), tożsamości termodynamicznej

$$T \frac{dS}{dr} = c_p \frac{dT}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}$$



Rysunek 16: Względna jasność,  $L_r/L$ , obfitość wodoru,  $X$  i gradient promienisty,  $\nabla_{\text{rad}}$ , w dwóch modelach gwiazdy o masie  $1M_{\odot}$ , po zakończeniu fazy syntezy He w jądrze. Przedział czasu dzielący modele wynosi  $\sim 18\%$  czasu życia na ciągu głównym (dla przypadku modeli na rys. 15 wynosi  $< 1\%$ ). Zauważmy duże różnice pomiędzy modelami w kształcie  $X(M_r)$  w centralnych częściach przy znikomych różnicach zdale od centrum. W modelu młodszym energia produkowana jest w rozległym obszarze. W modelu starszym, energia niemal w całości produkowana jest w cienkiej warstwie pomiędzy  $M_r/M = 0.12$  a  $0.14$ , gdzie widzimy stromy wzrost  $L_r$ . Tam też ma miejsce stromy wzrost  $X$ . Poza tą warstwą strumień jest stały. Jądro helowe jest częściowo zdegenerowane i prawie izotermiczne. Gwiazda o masie  $1M_{\odot}$  w tej fazie ewolucji zachowuje w dobrym przybliżeniu równowagę cieplną.

i warunku równowagi hydrostatycznej, można ten człon przekształcić do postaci

$$\epsilon_g \equiv -vT \frac{dS}{dr} = \frac{g}{4\pi r^2 \rho} \frac{dM_{\text{He}}}{dt} \left( 1 - \frac{\nabla_{\text{rad}}}{\nabla_{\text{ad}}} \right). \quad (399)$$

W naszym zastosowaniu zachodzi  $\epsilon_g \ll \epsilon$ . Zaniedbując  $\epsilon_g$ , dostajemy z (396-398)

$$\frac{dX}{dM_r} = C \frac{dL_r}{dM_r}, \quad (400)$$

z

$$C = \frac{Q_{\text{eff,cno}}}{m} \frac{dM_{\text{He}}}{dt}.$$

Tę stałą wyznaczymy z warunków  $X(L_{\text{He}}) = 0$  i  $X(L) = X_{\text{env}}$  i ostatecznie mamy

$$X(L_r) = X_{\text{env}} \frac{L_r - L_{\text{He}}}{L - L_{\text{He}}}. \quad (401)$$

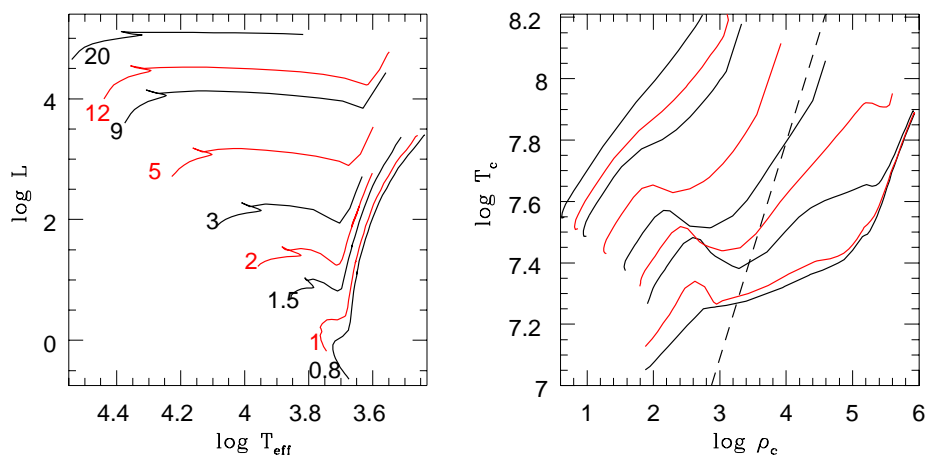
Obfitość wodoru w obrębie warstwy wyznacza lokalna wartość  $L_r$ , a więc nie zależy ona od przeszłości. Wzór (401) daje pełny opis zależności  $X(M_r)$  w całym wnętrzu gwiazdy dopiero wtedy gdy warstwa sięga do obszaru chemicznie jednorodnego. Przebieg  $X(M_r)$  pokazany w dolnym panelu rys. 16 powyżej  $M_r/M_{\odot} \approx 0.15$  jest wyznaczony we wcześniejszych fazach ewolucji. Wzór (401) daje niezłe przybliżenie w obrębie warstwy spalania ( $M_r/M_{\odot} = 0.12$  do  $0.14$ ) z  $X_{\text{env}} = 0.35$  i  $L_{\text{He}} = 0$ . Przybliżenie poprawia się wraz z postępem ewolucji. Wtedy też  $X_{\text{env}}$  stopniowo zbliża się do wartości powierzchniowej. Wzór ten, z  $L_{\text{He}} \neq 0$ , daje też dobry opis zależności  $X(M_r)$  dla modeli gwiazd w późniejszych fazach powolnej ewolucji.

### 15.3 Gwiazdy na gałęzi olbrzymów

Na rysunku 17 widzimy, że z wyjątkiem modelu z masą  $M = 20M_{\odot}$ , początek syntezy węgla następuje gdy gwiazda znajduje się na linii Hayashi'ego odpowiadającej modelem konwektywnym. Małe promieniste jądro nie ma istotnego wpływu na przebieg tych linii na diagramie HR. Ich zbiór opisuje gałąź olbrzymów. Ogromna większość czerwonych olbrzymów to obiekty o masach mniejszych niż ok.  $2M_{\odot}$ , które przesuwały się wzdłuż tej gałęzi w nuklearnej skali czasowej. Osiągają one bardzo wielkie rozmiary ( $R \sim 200R_{\odot}$ ) i jasności ( $L \sim 3000L_{\odot}$ ). Zajmują wtedy górną część gałęzi czerwonych olbrzymów (RGB). Obserwowane tempo utraty masy dla gwiazd w pobliżu szczytu tej gałęzi jest rzędu  $10^{-7}M_{\odot}/\text{rok}$ . Na przebieg ewolucji wzdłuż gałęzi czerwonych olbrzymów, a zwłaszcza na utratę masy istotny wpływ może mieć utrata masy w wyniku oddziaływania z innymi gwiazdami i pochłanianie układów planetyarnych. Te zjawiska wymagają odrębnego traktowania.

Położenie indywidualnych torów ewolucyjnych zależy od masy, ale też od parametru konwekcji  $\alpha_{\text{con}}$ . W modelach wykorzystanych na rysunku 15 przyjęta została wartość 1.6, która prowadzi do przybliżonej zgodności z obserwacjami.

W czasie ewolucji w górę gałęzi olbrzymów rozwijająca się warstwa konwektywna sięga obszarów chemicznie niejednorodnych leżących powyżej warstwy

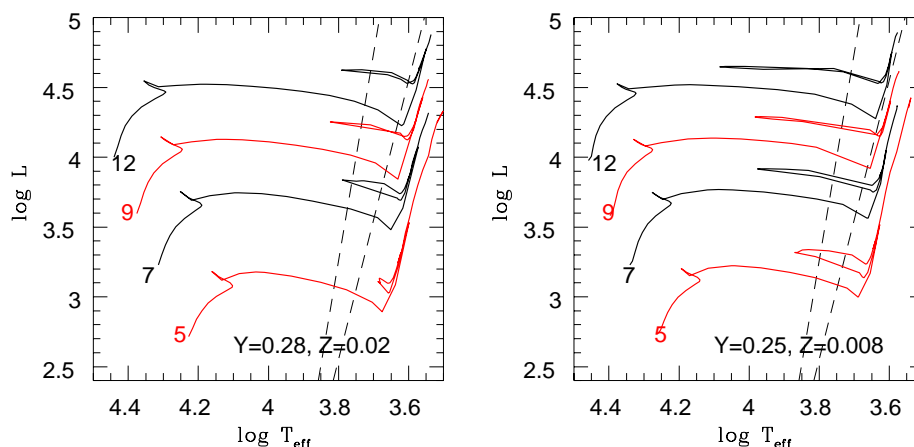


Rysunek 17: Tory ewolucyjne na diagramach H-R i  $\log \rho_c - \log T_c$  gwiazd populacji I od ZAMS do początku syntezy węgla w jądrze helowym, na podstawie modeli z *Padova database of stellar evolutionary tracks and isochrones* (<http://pleiadi.astro.it/>). Linia przerywana jest odpowiada wartości parametru degeneracji  $\exp \psi = 1$  (rów. 153). W gwiazdach z parametrami znacznie powyżej tej linii efekty degeneracji są zanedbywalne. Znacznie poniżej degeneracja elektronów w helowych jądrach jest praktycznie całkowita.

palenia wodoru. Warstwy takie powstają w fazie ciągu głównego. Dla gwiazd masywnych w wyniku cofania się jądra konwektywnego. W gwiazdach o masach słonecznych warstwy takie reliktem spalanie powolnego wodoru w rozległym jądrze promienistym i ewentualnie dyfuzji. Wewnętrzna część warstwy niejednorodnej dołącza do jądra helowego. Zewnętrzna zostaje wchłonięta przez otoczkę konwektywną i ten sposób fotosfera gwiazdy zostaje nieco wzbogacona w produkty nukleosyntezy. Wybór kryterium wyznaczającego dolną granicę otoczki konwektywnej jest przedmiotem kontrowersji. Dla gwiazd masywnych, wybór kryterium wpływa na strukturę modeli w fazie palenia helu.

Reakcje prowadzące do syntezy jąder węgla z trzech jąder helu (*cykl 3 $\alpha$* ) stają się efektywne gdy temperatura w centrum przekracza ok.  $1.5 \times 10^8$ , niemal niezależnie od masy gwiazdy. Linie dla gwiazd z  $M < 3M_\odot$  na diagramie  $\rho_c - T_c$ , pokazanym w prawej części rysunku 17, kończą się poniżej tej wartości ponieważ maksimum temperatury występuje dla takich gwiazd nie w centrum, a powyżej. Ujemny gradient temperatury w zdegenerowanym jądrze powstaje w wyniku chłodzenie przez foto-neutrino. Jego tempo rośnie z gęstością. Ponieważ szybkość reakcji  $3\alpha$  rośnie znacznie szybciej z temperaturą (wykładnik  $>30$ ) niż z gęstością (wykładnik 3), to z zdegenerowanym jądrze reakcja zaczyna się w pewnej odległości od centrum, na przykład w modelu z  $M = 1M_\odot$ , przy  $M_r = 0.18M$ .

Hansen i Kawaler podają następujący wzór na masę helowego jądra w tym



Rysunek 18: Tory ewolucyjne na diagramie H-R dla gwiazd o masach  $\geq 3M_{\odot}$  od ZAMSu do końca syntezy węgla w jądrze na podstawie modeli z *Padova database*. Na lewym rysunku przyjęte parametry  $X$  i  $Z$  odpowiadają populacji I w Galaktyce. Te przyjęte na prawym rysunku odpowiadają młodej populacji gwiazd w LMC. Należy zwrócić uwagę na różnice w długości pętli. Przerywane linie oznaczają położenie pasa Cefeid.

momencie.

$$\frac{M_{\text{core}}}{M_{\odot}} = [0.476 - 0.221(Y - 0.3) + 0.009(\log Z + 3) - 0.023(\frac{M}{M_{\odot}} - 0.8)], \quad (402)$$

który został uzyskany przez dopasowanie do obliczeń dla  $0.03 < Z < 0.0001$ . Dla Słońca znajdujemy stąd  $M_{\text{core}} = 0.485M_{\odot}$ . Minimalna masa początkowa gwiazd, które mogą kiedykolwiek syntetyzować węgiel wynosi ok.  $0.5M_{\odot}$ .

Sposób zapalenia helu zależy od tego czy materia w jądrze jest zdegenerowana. Jeżeli tak jest, to zapalenie ma charakter wybuchu zwanego *łyskiem helowym*. O niestabilności cieplnej w takiej sytuacji była mowa w rozdziale 11.3.

## 15.4 Gwiazdy masywne w fazie palenia helu w jądrze konwektywnym

W gwiazdach o masach przewyższających ok.  $2.3M_{\odot}$  cykl  $3\alpha$  zaczyna efektywnie działać w centrum jądra, gdzie nie ma jeszcze znaczącej degeneracji elektronów, a więc inicjacja jest niewybuchowa. Jasność spada, bo strumień produkowany w reakcji  $3\alpha$  nie kompensuje zmniejszonej efektywności cyklu CNO. Początkowo, gwiazdy zachowują niskie temperatury efektywne tworząc pas *czerwonych nadolbrzymów* nad zagęszczeniem gałęzi olbrzymów znanym jako *Red Clump* (RC), które zajmują gwiazdy o niższych masach, jeżeli nie utraciły odpowiedniej ilości masy z ich pierwotnych otoczek.

Ewolucja w stronę wysokich temperatur efektywnych zaczyna się wtedy gdy względna masa wodorowej otoczki stanie się dostatecznie mała, a powrót w

stronę niskich temperatur następuje po zamianie większości helu w węgiel i tlen w konwektywnych jądrach. Zasięg pętli tworzonych przez tory ewolucyjne na diagramie H-R pętli zależy od masy i składu chemicznego. Na rysunku 18 widzimy, że przy galaktycznych obfitościach i masie  $5M_{\odot}$  pętle nie sięgają pasa Cefeid. Przy składzie typowym dla Wielkiego Obłoku Magellana (LMC) pętle są wyraźnie dłuższe. Końce pętli tworzą kolejne zgęszczenie na diagramie *pas niebieskich nadolbrzymów*.

W tabeli 4 podane są wyliczone czasy trwania poszczególnych faz ewolucji dla modeli użytych na rysunku 18. Dla fazy palenia helu w jądrze podane są względne czasy spędzone po obydwu stronach pasa niestabilności Cefeid,

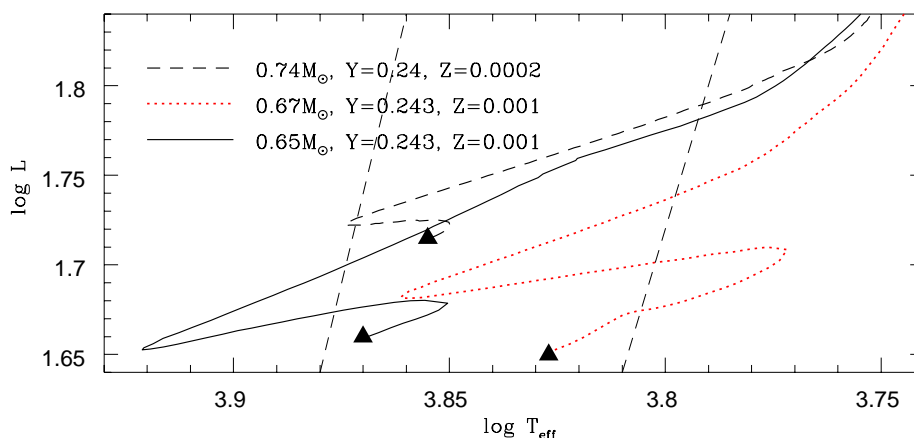
Tablica 4: Czas życia w milionach lat na ciągu głównego (MS), w przerwie Hertzsprunga (HG) i w fazie palenia He w jądrze (HeB) oraz względny czas w tej ostatniej spędzony na lewo (blue) i prawo (red) od pasa niestabilności Cefeid dla gwiazdy o masach od  $M = 5$  do  $12 M_{\odot}$  oraz parametrach składu  $X = 0.742$ ,  $Z = 0.008$ . (Na podstawie danych z *Padova database*)

$M/M_{\odot}$	$\tau_{\text{MS}}$	$\tau_{\text{HG}}$	$\tau_{\text{HeB}}$	red	blue
5	105.0	0.140	9.38	0.44	0.43
7	52.3	0.060	3.76	0.53	0.41
9	32.4	0.046	1.98	0.54	0.40
12	19.8	0.018	1.19	0.41	0.48

Modelowanie gwiazd w tej fazie jest obarczone niepewnością. Zasięg pętli horyzontalnej, obok masy i metaliczności, zależy też od niepewnych parametrów opisujących mieszanie pierwiastków we wnętrzach gwiazd. Rozmaite dane obserwacyjne wykorzystywane są do testowania teorii ewolucji gwiazd, która m.in. powinna zdać sprawę z proporcji gwiazd tworzących pasy czerwonych i niebieskich nadolbrzymów. Szczególnych wartościowych informacji dostarczają nam okresy Cefeid, które są podstawowymi świecami standardowymi dla pomiarów odległości we wszechświecie. Zależności okres-jasność poświęcony jest rozdział 15.8 Pulsowanie nie ma wpływu na przebieg ewolucji. Jest natomiast źródłem dodatkowej informacji o obiektach. Dla testowania teorii ważne są nie tylko wartości okresów, ale także ich tempa zmian oraz dodatkowe dane zawarte w krzywych zmian blasku.

## 15.5 Błysk helowy i gwiazdy gałęzi horyzontalnej

W gwiazdach masach mniejszych niż ok.  $2.3M_{\odot}$  cykl  $3\alpha$  zaczyna działać w zdegenerowanym jądrze w warstwie oddalonej od centrum. Początek ma charakter wybuchowy. Dopiero niedawno opublikowane zostały wyniki pierwszych trójwymiarowych symulacji tego zjawiska (Dearborn i in., 2006). Potrzeba trójwymiarowego opisu wynika z pojawiającej się niestabilności konwektywnej. Wyniki tych symulacji wskazują na gwałtowny ale nie dynamiczny charakter



Rysunek 19: Tory ewolucyjne gwiazd małowasywnych fazy syntezy węgla w jądrze liczone od ZAHB. Trójkątami oznaczone są początki torów. Linie przerywane zaznaczają pas niestabilności pulsacyjnej.

zjawiska. Prędkości gazu są zawsze dużo niższe od prędkości dźwięku. Nie ma też wskazań by błysk helowy był przyczyną znaczącej utraty masy. Całe zjawisko rozgrywa się w wewnętrznej części gwiazdy. W analizowanym modelu błysku helowego w gwieździe o masie  $1M_{\odot}$  błysk zaczyna się gdy masa jądra wynosi  $0.47M_{\odot}$ , promień  $0.026R_{\odot}$ . Wzrost mocy promieniowania produkowanego w cyklu  $3\alpha$  od  $10^2$  do  $10^3L_{\odot}$  zachodzi w ciągu nieco ponad 1000 lat, ale już wzrost od  $10^8L_{\odot}$  do szczytowej wartości  $3 \times 10^9L_{\odot}$  trwa tylko 14 dni. Ogromna większość tej energii idzie na wzrost energii grawitacyjnej i wewnętrznej jądra. Początkowo, reakcje jądrowe zachodzą tylko w jego zewnętrznej części (powyżej  $0.16M_{\odot}$ ) i tam tylko rozwija się konwekcja. Dopiero po  $2 \times 10^6$  lat od błysku formuje się w całości konwektywne jądro. Względna obfitość węgla wynosi wtedy  $X_{12} = 0.035$ .

Często w kodach ewolucyjnych omija się błysk helowy i modelowanie gwiazd w fazie palenia helu inicjuje się modelami wieku zero gałęzi horyzontalnej (ZAHB). Zakłada się dla nich równowagę cieplną, profil  $X(M_r)$  taki, jak w momencie zapalenia helu, a masę otoczki traktuje jako wolny parametr. Przykłady torów generowanych w ten sposób pokazane są na rysunku 19. Ilość utraconej masy została w tych trzech przypadkach tak dobrana, aby tor przechodził przez pas niestabilności odpowiedzialnej za pulsacje gwiazd typu RR Lyrae.

Bez utraty masy gwiazda pozostawałaby w obrębie RC. Im większa utrata masy, tym dłuższa pętla. Po przekroczeniu pewnej granicy tor ewolucyjny już nie powraca do obszaru niskich temperatur. Jeśli tempo utraty masy w fazie ewolucji na gałęzi czerwonych olbrzymów jest dostatecznie wysokie ( $\eta > 0.55$  we wzorze Reimera (366)), to po błysku helowym gwiazda kontynuuje ewolucję jako obiekt gorący leżący na skrajnej gałęzi horyzontalnej (EHB).

Gwiazdy pulsujące typu RR Lyrae to obiekty gałęzi horyzontalnej o aktual-

nych masach  $\sim 0.6 - 0.8 M_{\odot}$  i pierwotnych masach większych o ok.  $0.1 - 0.3 M_{\odot}$ . Podobnie do Cefeid, gwiazdy typu RR Lyrae oraz gwiazdy tworzące RC są traktowane jako *świece standardowe* do wyznaczania odległości systemów gwiazdowych. W przypadku gwiazd pulsujących wykorzystuje się tu zależność *okres – jasność absolutna*, a w przypadku gwiazd z RC, to że jasności absolutne gwiazd w tej fazie ewolucji są słabo zależne od masy i składu chemicznego.

## 15.6 Mechanizmy wzbudzania pulsacji

W Słońcu, mody oscylacji wzbudzone są przez turbulencję. Tak wzbudzone mody p i f osiągają bardzo niskie amplitudy ( $\sim 10$  cm/s, 1-10 mmag) i, oprócz Słońca, zostały dotąd definitywnie wykryte tylko nielicznych (15) obiektach.

Pulsacje o znacznych amplitudach, takich jakie spotykamy u Cefeid, gwiazd RR Lyrae czy typu Mira Ceti, wzbudzone są w wyniku niestabilności modów. Mod oscylacji jest niestabilny jeśli gwiazda podlegająca opisaną nim okresową zmianą, działa tak jak silnik cieplny.

Rozważmy warstwę gwiazdy o grubości  $dM_r$  podlegającą cyklicznej zmianie. O tym czy będzie ona zyskiwała energię decyduje znak wielkości

$$w = \oint_{\Pi} dt T \frac{dS}{dt}, \quad (403)$$

gdzie całkę wykonuje się po okresie pulsacji. Zysk odpowiada  $w > 0$ . Warstwa działa tak jak silnik cieplny, jeśli zyskuje energię w fazie gdy jej temperatura jest powyżej średniej wartości, a traci gdy jest poniżej. Wyliczymy to wyrażenie dla małych zaburzeń wokół stanu równowagi cieplnej ( $(\frac{dS}{dt})_0 = 0$ ). W najniższym rzędzie rachunku zaburzeń mamy

$$w = \oint_{\Pi} dt \frac{\delta T}{T} T \frac{d\delta S}{dt}. \quad (404)$$

Z równania (244), mamy

$$T \frac{d\delta S}{dt} = \delta(\epsilon - \frac{\text{div} \mathbf{F}}{\rho}). \quad (405)$$

Ponieważ zawsze ma miejsce nierówność

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial T} > 0,$$

zaburzenia tempa wydzielania ciepła w reakcjach jądrowych zawsze działają destabilizująco na mody pulsacji. O stabilności modu decyduje jednak bilans strat i zysków w całej gwiazdzie, a zatem znak wielkości

$$W = \int w dM_r,$$

zwanej *całką pracy*. Z powodu małych amplitud w jądrach Cefeid i gwiazd typu RR Lyrae, destabilizujące działanie reakcji jądrowych nie odgrywa roli w ich

pulsacjach. Nie odgrywa też roli w żadnych ze znanych gwiazd pulsujących. O wzbudzaniu pulsacji w całym pasie Cefeid, a także we wszystkich gwiazdach pulsujących typu B (patrz rys. 20) decyduje zachowanie się współczynnika nieprzezroczystości w cyklu pulsacji. Aby zobaczyć kiedy zaburzenia nieprzezroczystości mogą działać destabilizująco, zapiszemy (404) dla przypadku zaburzeń radialnych i zaniedbamy  $\delta\epsilon$ . Mamy wtedy

$$w = - \oint_{\Pi} dt \frac{\delta T}{T} \frac{d\delta L_r}{dM_r}. \quad (406)$$

Warstwa zamienia energię promieniowania na energię pulsacji jeśli w gorącej fazie strumień do niej wpływający jest większy od wypływającego. Ze wzoru (249) na strumień promienisty, mamy

$$\frac{\delta L_r}{L_r} = - \frac{\delta \kappa}{\kappa} + \dots, \quad (407)$$

co pozwala nam na sformułowanie warunku na destabilizujące działanie zaburzeń nieprzezroczystości. (Oczywiście nie mówimy o warunku wystarczającym dla niestabilności, bo w (407) uwzględniamy tylko jeden z kilku składników.) Widzimy, że ma ono miejsce wtedy, gdy w fazie wysokiej temperatury względna zmiana nieprzezroczystości rośnie ze zbliżaniem się ku powierzchni. Taka sytuacja zachodzi m.in w warstwach częściowej jonizacji H i HeII i to te warstwy decydują o wzbudzaniu pulsacji w pasie Cefeid. Mówimy, że działa w nich *mechanizm nieprzezroczystości* ( $\kappa$ )

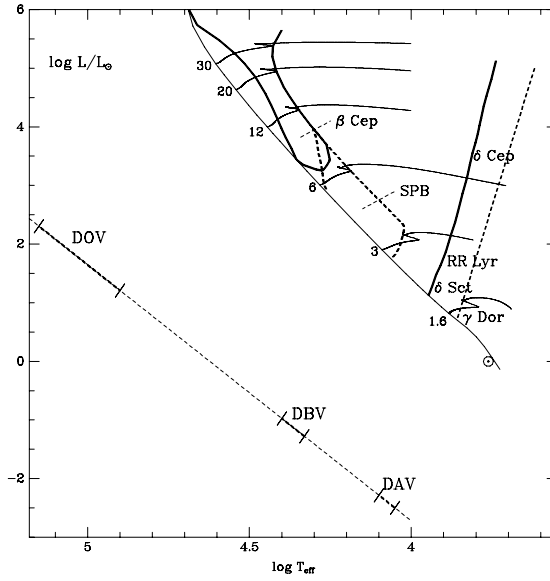
W gwiazdach typu B pulsacje napędza mechanizm nieprzezroczystości działający w warstwie wokół maksimum  $\kappa$  związanym z przejściami związanymi w atomach Fe (rys. 7, rozdz. 6.3.6).

W gwiazdach, w których otoczkach większość energii przenoszona jest drogą konwekcji, może działać inny mechanizm destabilizacji modów. Można pokazać, że w równowadze konwektywnej, dodatniemu zaburzeniu temperatury odpowiada ujemne zaburzenie pochodnej strumienia konwektywnego, co jak wynika z (406) prowadzi do  $w > 0$ . Mechanizm jest efektywny tylko dla oscylacji dostatecznie powolnych, a więc dla modów g. Odpowiada on za oscylacje białych karłów typów DAV i DAB. Być może też za oscylacje gwiazd typu  $\gamma$  Doradus, leżących pasie ciągu głównego.

## 15.7 Zależność Okres - Jasność

Fenomenologiczna zależność okres - jasność jest znana od ponad 90 lat. Po dziś dzień stanowi ona podstawę wyznaczania odległości we wszechświecie. Istnienie takiej zależności można uzasadnić na gruncie teorii ewolucji (modele średnie) i pulsacji gwiazd (okresy i zakresy występowania niestabilności).

Jako przykład rozważmy dwa ciągi modeli z pokazanych na prawym rysunku 18. Zaznaczone na nim granice pasa niestabilności trzeba traktować przybliżone. W zasadzie granice pasa wyznaczają miejsca na ciągach gdzie  $W = 0$ . Niebieską granicę można tak wyliczyć w sposób dość wiarygodny,



Rysunek 20: Gwiazdy pulsujące na teoretycznym diagramie H-R

ale dopiero z pomocą obliczeń nieliniowych można odpowiedzieć na pytanie, w którym dokładnie miejscu i który z modów osiąga wykrywalne amplitudy. Z granicą czerwoną jest większy problem, bo jej wyznaczenie silnie zależy od opisu konwekcji.

Wybrane tory trzykrotnie przecinają pas niestabilności. Z liczb podanych w Tabeli 5 wynika, że pierwsze przejście trwa bardzo krótko dlatego zaledwie jedna na kilkadziesiąt Cefeid może znajdować się w nim znajdować. Pominiemy tę możliwość w naszych rozważaniach.

Przy ustalonych wartościach  $X$  i  $Z$  modele dają oddzielne zależności

$$\Pi_1 = L - T_{\text{eff}}$$

dla  $k = 2$  i  $3$ . Z modeli ewolucyjnych dostajemy

$$L_k = L_k(M, T_{\text{eff}}), \quad k = 2, 3. \quad (408)$$

Łącząc wzór (74) na okres modu fundamentalnego,  $\Pi_1$  z zależnością  $R \propto L^{1/2}T^{-2}$ , dostajemy

$$\Pi_1 = Q_1 \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{0.5} \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right)^{0.75} \left( \frac{T_{\text{eff}, \odot}}{T_{\text{eff}}} \right)^3. \quad (409)$$

Słabą zależność  $Q_1 = Q_1(M, L, T_{\text{eff}})$  wyznaczyć można numerycznie z danych w tabeli 4. Wykorzystując (408) do wyeliminowania  $M$  można dostać oddzielne zależności *okres - jasność - temperatura* dla dwóch przejść. Dane liczbowe przekonują nas jednak, że te zależności muszą być niemal identyczne, bo jasności są prawie stałe. Przyjmując wspólną zależność masa - jasność w postaci

Tablica 5: Trzy przejścia ( $k = 1, 2, 3$ ) gwiazdy o masach  $M = 5$  i  $9M_{\odot}$  oraz parametrach składu  $X = 0.742$ ,  $Z = 0.008$  przez pas niestabilności Cefeid

$M, k$	$\log T_{\text{eff}}$	$\log L$	$\log \Pi_1[\text{d}]$	$Q[\text{d}]$	czas[l]
5, 1	3.810-3.745	3.14-3.08	0.435 - 0.611	0.0377-0.0399	$2.0 \times 10^4$
5, 2	3.732-3.802	3.22-3.28	0.768 - 0.584	0.0413-0.0391	$3.8 \times 10^5$
5, 3	3.796-3.232	3.33-3.31	0.646 - 0.877	0.0397-0.0427	$9.0 \times 10^5$
9, 1	3.750-3.655	4.02-3.92	1.225 - 1.480	0.0452-0.0496	$2.7 \times 10^3$
9, 2	3.634-3.736	4.16-4.21	1.778 - 1.449	0.0566-0.0495	$6.5 \times 10^4$
9, 3	3.734-3.631	4.22-4.19	1.475 - 1.818	0.0501-0.0577	$5.0 \times 10^4$

Okresy pierwszych owertonów w tych modelach są dobrze przybliżone wzorem

$$\Pi_2 = \Pi_1(0.733 - 0.034 \log \Pi_1)$$

$L \propto M^q$  z  $q = 3.56$  i przybliżenia  $Q_1 = \text{const.}$ , znajdujemy z (408)

$$\Pi_1 \propto L^{0.75-0.5/q} T_{\text{eff}}^{-3}. \quad (410)$$

Ponieważ  $Q_1$  rośnie z  $L$  i maleje z  $T_{\text{eff}}$ , to ścisła zależność od obydwu parametrów jest nieco stromsza. Dla porównania teoretycznych i empirycznych zależności potrzebne jest przejście od  $L$  i  $T_{\text{eff}}$  do fotometrycznych wielkości absolutnych i wskaźników barwy. Wykorzystuje się do tego celu tablice oparte na modelach atmosfer gwiazdowych. Mały rozrzut empirycznej zależności okres – jasność wynika z tego, że dla Cefeid zakres wartości  $L$  jest szeroki, a zakres  $T_{\text{eff}}$  dla danego  $L$  bardzo wąski.

*zadanie* W gromadzie należącej do LMC, znaleziono kilka Cefeidy pulsujących w modzie podstawowym z okresami w przedziale 3.341-5.339 dnia. Korzystając z danych w tabelach 4 i 5 (interpolacja liniowa logarytmów potrzebnych wielkości) i biorąc pod uwagę tylko przejścia 2 i 3 przez pas niestabilności, ocenić wiek gromady.

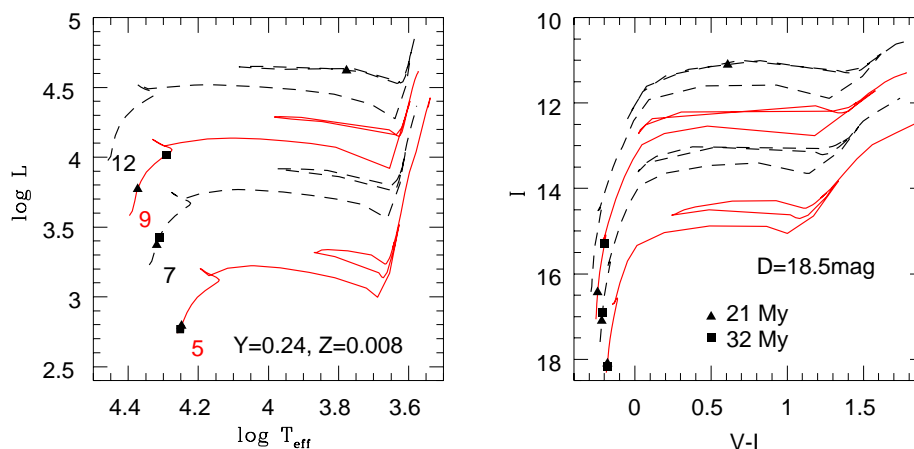
## 15.8 Tory ewolucyjne i izochrony na diagramie H-R

Porównanie wyników obliczeń ewolucji gwiazd na diagramie H-R z obserwacjami wymaga przejścia od parametrów  $T_{\text{eff}}$  i  $L$  do wskaźników barwy i wielkości gwiazdowych w odpowiednim systemie fotometrycznym. Przejście wymaga przyjęcia modułu odległości  $D$  i skorzystania z modeli atmosfer gwiazdowych. Dla wybranego systemu fotometrycznego modele pozwalają na wyliczenie poprawek bolometrycznych i wskaźników barwy na podstawie syntetycznych widm. Korzystamy na przykład z zależności,

$$V = 4.75 - 2.5 \log L/L_{\odot} - BC + D,$$

i

$$(g, T_{\text{eff}}, \mathbf{X}) \rightarrow (BC, V - I).$$



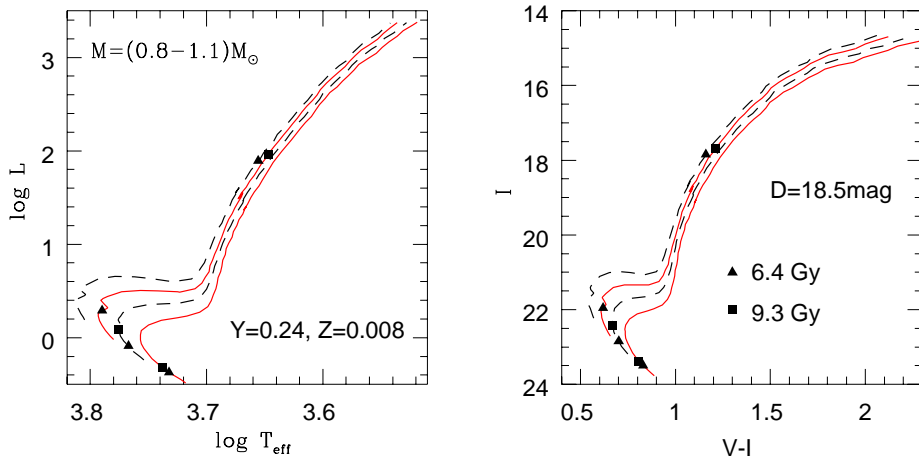
Rysunek 21: Tory ewolucyjne na teoretycznym (z lewej) i obserwacyjnym (z prawej) diagramie H-R dla gwiazd o podanych masach i początkowym składzie chemicznym. Na torach zaznaczone są punkty odpowiadające dwóm wybranym czasom ewolucji liczonej od ZAMS. Gwiazda o początkowej masie  $12M_{\odot}$  po 32 My jest już gwiazdą neutronową, a wcześniej wybuchła jako supernowa typu II.

Na rysunkach 21 i 22 pokazane są wyliczone tory ewolucyjne diagramie H-R odpowiednio dla gwiazd o masach z przedziału  $(5-12)M_{\odot}$  i około  $1M_{\odot}$ . Z lewej strony pokazane są tory na diagramach teoretycznych pochodzących z *Padova evolutionary track*, a z prawej na diagramie obserwacyjnym w systemie  $(V, I)$ . Przejście wykonane zostało z wykorzystaniem tabel Kurucza (<http://kurucz.harvard.edu>), opartych na jego płasko-równoległych modelach. Wartości  $Y = 0.24$  i  $Z = 0.008$  i  $D = 18.5$  mag są typowo przyjmowane dla młodej populacji gwiazd LMC.

Na torach ewolucyjnych zaznaczone są punkty odpowiadające tym samym wybranym czasom ewolucji liczonej od ZAMS. Linie łączące takie punkty (*izochrony*) stanowią podstawę datowania systemów gwiazdowych, o których można założyć że gwiazdy w nich są równowieczne i że miały ten sam początkowy skład chemiczny. Dopasowanie obserwowanych i syntetycznych diagramów kolor-jasność pozwala nie tylko na ustalenie wieku systemu, ale i wyznaczenie modułu odległości oraz kalibrację parametrow modelowania.

Dla datowania i zmierzenia odległości młodych gromad, w których występują gwiazdy masywne, kluczowe znaczenie ma wyznaczenie położenia TAMSu na izochronie. W tym miejscu przypomnieć wypada, że na położenie TAMSu wpływa też wartość parametru  $\alpha_{ov}$  określającego zakres mieszania poza granicę jądra konwektywnego.

Silna zależność tempa ewolucji od masy gwiazdy sprawia, że izochrony mają zbliżony przebieg do torów ewolucyjnych dla gwiazd o masach gwiazd w pobliżu TAMS. Na przykład (rysunek 21) przebieg izochrony odpowiadającej 32 My jest

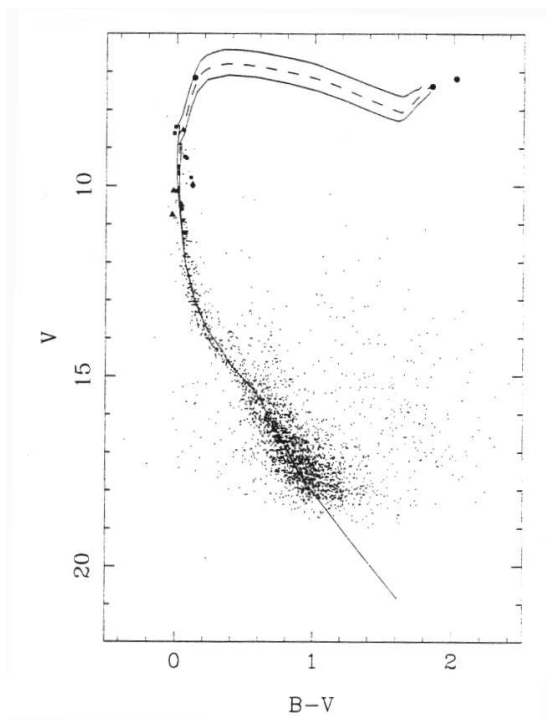


Rysunek 22: Tory ewolucyjne na teoretycznym i obserwacyjnym diagramie H-R dla gwiazd o masach  $(0.8, 0.9, 1.0, 1.1M_{\odot})$  i podanym początkowym składzie chemicznym. Na torach zaznaczone są punkty odpowiadające dwóm wybranym czasom ewolucji liczonej od ZAMS. Gwiazda o masie  $1.1M_{\odot}$  po 9.6 Gy jest już białym karłem.

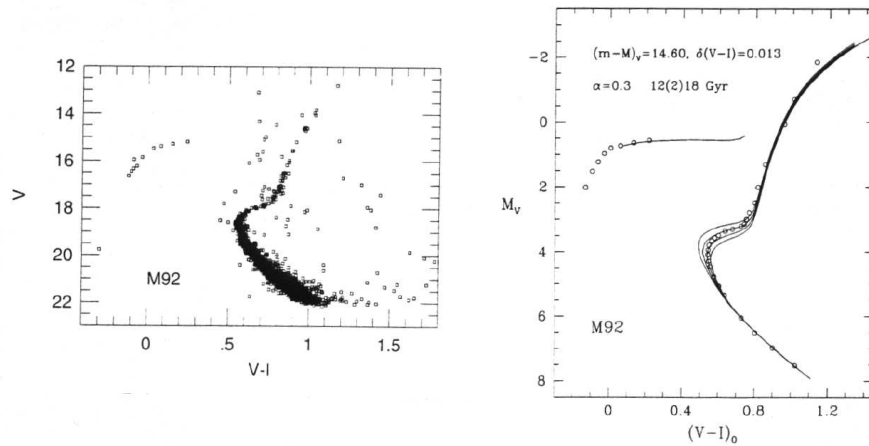
podobny do przebiegu toru ewolucyjnego dla  $M \approx 9M_{\odot}$ .

Na rysunku 23 pokazany jest przykład dopasowania izochron dla gromady otwartej. Znaczna niepewność wyznaczenia wieku wynika z niewielkiej ilości obiektów zaawansowanych w ewolucji.

Wyznaczenie wieku gromad kulistych, które należą do najstarszych obiektów wszechświata ma podstawowe znaczenie dla kosmologii. Jasność i temperatura gwiazd w miejscu skreślenia izochrony w prawo (punkt odejścia, *turnoff point*) zależy silnie od ich wieku). Wiek wyznacza się jednocześnie z  $D$  i  $\alpha_c$  dopasowując izochrony do obserwowanych diagramów kolor-jasność. Dopasowanie gałęzi horyzontalnej wykonuje się dobierając ilość utraconej masy w fazie czerwonych olbrzymów. Przykład wyznaczenia wieku gromady kulistej w oparciu o dopasowanie izochron pokazany jest na rysunku 24.



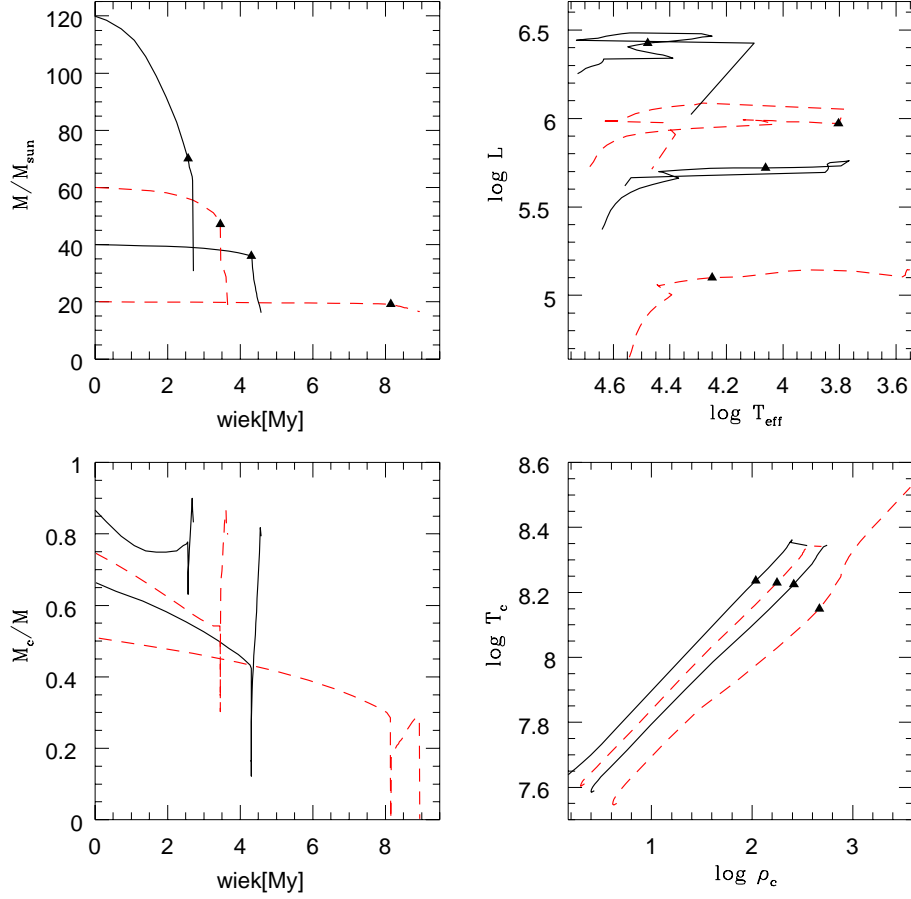
Rysunek 23: Wyznaczenie wieku gromady otwartej NGC 3766 metodą dopasowania izochron do obserwacyjnego wykresu H-R. Narysowane izochrony odpowiadają  $(2.0, 2.4, 2.8) \times 10^7$  lat. Rysunek z pracy Moutinho i in. (1997)



Rysunek 24: Wykres H-R dla gromady kulistej M92 (z pracy Johnson & Bolte, 1998). Dobrze zaznaczona gałąź horyzontalna. Obok, dopasowanie izochron (z pracy Harrisa i in., 1997). Wiek gromady oceniony na  $(1.4 - 1.6) \times 10^{10}$  lat.

### 15.9 Ewolucja gwiazd bardzo masywnych

Utrata masy wskutek wiatru napędzanego ciśnieniem promieniowania jest istotnym czynnikiem wpływającym na przebieg ewolucji w fazach palenia wodoru i helu w jądrach konwektywnych. Rysunek 24 oparty na obliczeniach Shalleri in. (1994) pokazuje przebieg parametrów modeli gwiazd masywnych o masach początkowych od  $20$  do  $120M_{\odot}$  w tych fazach ewolucji. Tempo utraty masy opisane jest wzorem (365), który stosuje się do składu chemicznego populacji I. Szacuje się, że tempo utraty masy jest proporcjonalne do  $\sqrt{Z}$ . Obliczenia zostały wykonane z  $\alpha_{\text{ov}} = 0.2$  i przy zaniedbaniu efektów rotacji. Wyniki są silnie zależne od założonego tempa utraty masy i zasięgu mieszania pierwiastków.



Rysunek 25: Zmiany parametrów gwiazd masywnych populacji I ( $Z = 0.02$ ) od ZAMS poprzez część fazy palenia helu w jądrze. Wykresy kończą się przy  $Y_c = 0., 0.3, 0.35, 0.45$  odpowiednio dla mas początkowych  $M_0 = 20, 40, 60, 120 M_\odot$ . Dla gwiazd z  $M_0 = 40, 60, 120 M_\odot$  w momencie zakończenia palenia He w jądrze całkowite masy gwiazd wynoszą odpowiednio  $8.28, 7.98, 7.70 M_\odot$ . (Maleją z  $M_0$ !). Trójkąty oznaczają początek fazy palenia helu w jądrze