11 Równowagowe modele gwiazd sferycznych

11.1 Gwiazdowe skale czasowe

11.1.1 Kolaps grawitacyjny i dynamiczna skala czasowa

Jeżeli ciśnienie gazu nie równoważy grawitacji, to konfiguracja zapada się tak długo, aż w wyniku wzrostu gradientu ciśnienia nie zostanie osiągnięta równowaga hydrostatyczna. Zapadanie się obiektu pod działaniem samograwitacji nazywa się *kolapsem grawitacyjnym.*

Przypuśćmy, że w gwieździe zbudowanej z gazu doskonałego rozkład ciśnienia i gęstości opisany jest zależnością politropową. Widzieliśmy w rozdziale 2, że politropowe konfiguracje równowagowe istnieją tylko dla $n < 5$. Oznacza to, że dla skompensowania grawitacji konieczny jest pewien gradient temperatury, a zatem niezerowy strumień promieniowania i dostateczna nieprzezroczystość gazu.

Początkową fazę kolapsu można opisywać zaniedbując całkowicie ciśnienie gazu. Wtedy ewolucję promienia kuli o masie M_r opisuje równanie Newtona

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_r}{r^2}.$$

Zadanie: Zakładając że w chwili $t = 0$ makroskopowa prędkość wszystkich punktów wynosiła zero pokazać, że czas zapadania się od wartości promienia $r_0 = r(0)$ do $r(t)$ dany jest przez

$$t(r) = \sqrt{1.5}\tau_d(r_0)\left(\frac{h}{1+h^2} + \arctan h\right)$$

gdzie $h = \sqrt{r_0/r - 1}$, a

$$\tau_d^{-1}(r) = \sqrt{\frac{3GM_r}{r^3}} = \sqrt{4\pi G\bar{\rho}_r}.$$

Zauważmy, że jeżeli początkowa konfiguracja była jednorodna w gęstości, to τ_d nie zależy od r_0 i konfiguracja pozostaje jednorodna w czasie kolapsu.

Wielkość

$$\tau_d \equiv \tau_d(R) \equiv (4\pi G\bar{\rho})^{-\frac{1}{2}} \approx 15\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{M_\odot}{M}}\ \mathrm{min} \tag{312}$$

nazywamy *dynamiczną skalą czasową* gwiazdy. Wyznacza ona nie tylko charakterystyczny czas kolapsu, ale też daje niezłe oszacowanie podstawowego okresu pulsacji radialnych, Π_1 i czasu propagacji fali dźwiękowej od powierzchni do centrum, τ_a.

Wzory (73) i (74) z podrozdziału 3.2 dają

$$\Pi_1 = \frac{2\pi}{\sigma_1}\tau_d.$$

Bezywmiarowa częstotliwość modu podstawowego, σ_1, dla większości gwiazd mieści się w przedziale od 1.4 do 2.

Oszacujemy teraz τ_a dla gwiazd politropowych zbudowanych z gazu doskonałego. Prędkość dźwięku w jednoatomowym gazie doskonałym dana jest wzorem

$$v_a = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{p}{\rho}}.$$

Czas propagacji ocenimy jako

$$\tau_a \approx \frac{R}{\sqrt{\overline{v_a^2}}},$$

gdzie

$$\overline{v_a^2} = \frac{5}{3}\frac{\int_0^M \frac{p}{\rho} dM_r}{M}.$$

Po skorzystaniu ze wzorów (15) i (57), dostajemy

$$\overline{v_a^2} = \frac{5}{(5-n)}\frac{GM}{3R},$$

a następnie

$$\tau_a \approx 3\tau_d\sqrt{1-0.2n}.$$

Dokładną wartość τ_a, dla politrop można wyliczyć ze wzoru

$$\tau_a = \int_0^R \frac{dr}{v_a} = \tau_d\sqrt{\frac{0.6(n+1)}{\lambda}}\int_0^{\xi_1}\theta^{-\frac{1}{2}}d\xi$$

Zdanie: Proszę wyprowdzić ten wzór i wyliczyć τ_a dla n=2,3,4. Wartości λ mamy w Tabeli 1 a wartości ostatniej całki wynoszą, odpowiedno, 10, 21 i 69. Następnie, proszę porównać z wynikiem przybliżonym i wyjaśnić przyczynę systematycznej różnicy.

11.1.2 Skala cieplna

Zakładamy, że gwiazda scharakteryzowana parametrami M, R i L znajduje się w równowadze hydrostatycznej. Przez L oznaczamy jasność gwiazdy, czyli całkowity strumień energii promieniowanej w jednostce czasu. Jeżeli jądrowe źródła energii i neutrinowe straty są nieistotne, to szybkość zmian energii gwiazdy dana jest wzorem

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -L.$$

Skalę czasową ewolucji gwiazdy wyznacza wtedy iloraz $|\mathcal{E}|/L$. Możemy, wspierając się n.p. wzorem (57) dla politrop, przyjąć GM^2/R jako ocenę $|\mathcal{E}| = 0.5|\mathcal{W}|$. Dlatego wielkość

$$\tau_{\rm th} \equiv \frac{GM^2}{RL} \approx 3\times 10^7\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\frac{L_\odot}{L}\frac{R_\odot}{R}\ \text{lat.} \tag{313}$$

definiujemy jako *cieplną skalę czasową*. Jest ona znacznie dłuższa od dynamicznej skali czasowej, ale znacznie krótsza od wieku Ziemi. Słońce musi więc posiadać jądrowe źródła energii. Z tego faktu zdano sobie sprawę już w latach dwudziestych. Ta ocena ma zastosowanie wtedy, gdy można korzystać z przybliżenia gazu doskonałego. Więc na przykład nie dla białych karłów. Także w przypadku, gdy istotne jest wkład promieniowania do ciśnienia ocena $\tau_{\rm th}$ wymaga modyfikacji.

Tylko nieliczne spośród obserwowanych gwiazd ewoluują w cieplnej skali czasowej (brązowe karły, gwiazdy typu T Tauri,....). Ponieważ jasność gwiazd ciągu głównego rośnie z masą zazwyczaj szybciej niż M^2 (średni wykładnik wynosi 3.7), a R chociaż wolniej też rośnie, to $\tau_{\rm th}$ jest szybko malejącą funkcją masy. Na przykład, dla gwiazdy o masie $M = 10M_\odot$ na początku jej ewolucji w fazie ciągu głównego mamy $\tau_{\rm th} = 1.5 \times 10^5$ lat.

Czas osiągania równowagi cieplnej przez otoczkę gwiazdy o masie $M_{\rm env} \ll M$ jest znacznie krótszy niż $\tau_{\rm th}$. Dla oceny tego czasu przyjmijmy, że ciśnienie gazu w otoczce jest ustaloną funkcją masy ($p(M_r) \approx g(M_r)(M - M_r)/4\pi r^2$), że na dnie otoczki ($M_r = M - M_{\rm env}$) dany strumień promieniowania, L, i że w chwili początkowej strumień powierzchniowy wynosi $L - \Delta L$. Pytamy po jakim czasie będziemy mieli $\Delta L/L \approx 0$. Ocenę czasu dostaniemy korzystając ze wzoru (244), w którym kładziemy $\epsilon = 0$, zakładamy symetrię sferyczną i zaniedbujemy zmiany ciśnienia. Skąd mamy

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial L_r}{\partial r}. \tag{314}$$

Po pomnożeniu przez $4\pi r^2/L$ i scałkowaniu dostajemy

$$\frac{1}{L}\frac{d}{dt}\int_{M-M_{\rm env}}^{M} dM_r c_p T = \frac{\Delta L}{L},$$

a stąd

$$\tau_{\rm th,env}(M_{\rm env}) = L^{-1}\int_{M-M_{\rm env}}^{M} dM_r c_p T.$$

Ponieważ $\tau_{\rm th,env} \ll \tau_{\rm th}$, to nawet w szybkich fazach ewolucji można korzystać z równowagowych modeli otoczek, w których $L_r = L$. Różnica wielu rzędów wielkości pomiędzy $\tau_{\rm th}$ i τ_d sprawia, że ma sens rozważanie modeli gwiazd znajdujących w stanie równowagi dynamicznej i nierównowagi cieplnej, ale założenie równowagi cieplnej zewnętrznej otoczki w czasie pulsacji nie jest już uzasadnione.

11.1.3 Jądrowe skale czasowe

Zapas energii jądrowej dany jest przez ilość pierwiastków powstających w wyniku syntezy pomnożonych przez różnicę pomiędzy początkowymi i końcowymi nadwyżkami mas (Δm, rów. 287). W dokładniejszej ocenie należy pomniejszyć różnice nadwyżek mas o energię unoszoną przez neutrina, ale to obniża wyliczony zapas energii o co najwyżej 10 %. W naszych ocenach pomijamy więc ten efekt.

Koncentrujemy teraz uwagę na fazie ciągu głównego. Ilość atomów helu zsyntetyzowanych w tej fazie zapisujemy jako $X_0 f_M M/m_{\rm He}$, gdzie X_0 oznacza względną początkową obfitość (~ 0.7 dla gwiazd populacji I), a f_M część masy gwiazdy, która podlega syntezie w fazie ciągu głównego, której koniec wyznacza moment zakończenia syntezy helu w centrum gwiazdy. Gdyby produkty nukleosyntezy były całkowicie mieszane, to mielibyśmy $f_M = 1$. Naprawdę wartość f_M wynosi ok. 0.13 przy $M = 1M_\odot$ i ok. 0.25 przy $M = 10M_\odot$. Z tabeli 2 znajdujemy, że różnica nadyżki masy przy syntezie jednego jądra helu wynosi

$$\Delta E_m = (4 \times 7.29 - 2.4)\ \text{MeV}\ = 4.3 \times 10^{-5}\ \text{erg},$$

a zatem dostępny zapas energii wynosi

$$E_n = 4.3 \times 10^{-5} \frac{X_0 f_M M}{m_{\rm He}}\ \text{erg} = 1.3 \times 10^{52} \frac{X_0 f_M M}{M_\odot}\ \text{erg}.$$

Wynika stąd następujące oszacowanie czasu życia gwiazdy na ciągu głównym

$$\tau_{\rm ms} = 7.5 \times 10^{10} \frac{X_0}{0.7} \frac{M}{M_\odot} \frac{L_\odot}{\bar{L}} f_M\ \text{lat}, \tag{315}$$

gdzie przez $\bar{L}$ oznaczyliśmy średnią jasność gwiazdy w fazie palenia wodoru. Czas życia Słońca na ciągu głównym wynosi ok. 9.6×10^9 lat, a gwiazdy o masie $M = 10M_\odot$ ok. 2×10^7 lat.

Gwiazdy masywne, po zakończeniu fazy ciągu głównego ewoluują w skali cieplnej szybko zmieniając paramtery powierzchniowe, co odpowiada za istnienie *Przerwy Hertzsprunga* na diagramie H-R. Dla gwiazd o masach mniejszych niż ok. $3M_\odot$, przynajmniej poczatkowo, tempem ewolucji rządzi synteza helu zachodząc nad bezwodorowym jądrem. Gdy masa wynosi mniej niż ok. $2M_\odot$ tak jest aż do początku syntezy węgla. Zapas energii jądrowej, E_n, jest wtedy większy niż dla fazy ciągu głównego. Jednak, ze względu na znacznie większe wartości $\bar{L}$, ta następna faza ewolucji trwa zawsze krócej. W przypadku gwiazdy o masie Słońca, 2.7×10^9 lat.

Różnica nadwyżek mas dla syntezy węgla wynosi 7.3 MeV. Część z tworzonych jąder węgla dołacza jądro helu, co wyzwala dodatkowo 2.3 MeV. Oznacza to, że z jednostki masy wydziela się mniej o 25 do 50% energii niż w syntezie helu. Z tego powodu, ale przede wszystkim, ze względu na wyższe wartości $\bar{L}$, faza syntezy węgla i tlenu w jądrze trwa krócej od fazy ciągu głównego. Zarówno jednak w tej fazie jak i w fazie ciągu głównego modele wyliczane przy założeniu równowagi cieplnej dają dobre przybliżenie.

11.2 Rozwiązywanie równań wewnętrznej budowy gwiazd sferycznych

11.2.1 Równania i warunki brzegowe

Przepisujemy cztery równania wewnętrznej budowy: (8), (9), (246) i (248).

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{316}$$

$$\frac{dp}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \tag{317}$$

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon \equiv \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu \tag{318}$$

$$\frac{dT}{dM_r} = \frac{T}{p}\frac{dp}{dM_r} \times \begin{cases} \nabla_{\text{rad}} & \text{jeżeli } \nabla_{\text{rad}} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{ad}} + \nabla_n & \text{jeżeli } \nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \end{cases} \tag{319}$$

Przypomnijmy jeszcze, że zgodnie z równaniem (249),

$$\nabla_{rad} = \frac{3\kappa L_r p}{16\pi GacM_r T^4}.$$

Gradient nadadiabatyczny, $\nabla_n \equiv \nabla - \nabla_{\text{ad}}$, uwzględnia się jedynie w warstwach zewnętrznych gwiazd, wyliczając go według przepisu podanego w podrozdziale 9.5.

Zależności mikroskopowe $p(\rho, T, \boldsymbol{X})$, $\epsilon(\rho, T, \boldsymbol{X})$, $\nabla_{\text{ad}}(\rho, T, \boldsymbol{X})$ i $\kappa(\rho, T, \boldsymbol{X})$ traktujemy jako znane *dane materiałowe.* Także jako dane traktujemy $\boldsymbol{X}(M_r)$.

Mamy więc cztery równania różniczkowe zwyczajne na cztery następujące funkcje: $r(M_r)$, $p(M_r)$, $T(M_r)$, $L(M_r)$. Oczywiście korzystając z z zależności $p(\rho, T, \boldsymbol{X})$, oraz z równań (317) i (319) można łatwo uzyskać wyrażenie na pochodną ρ i zastąpić nim (317).

Mamy też cztery warunki brzegowe.

$$\text{Dla } M_r = 0 \qquad L_r = 0 \text{ i } r = 0. \tag{320}$$

Te nie wymagają komentarza. Jako zewnętrzne warunki brzegowe przyjmujemy

$$\text{dla } M_r = M \qquad \rho \approx 0 \text{ i } T = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} T_{\text{eff}} = \left(\frac{L}{8\pi\sigma R^2}\right)^{1/4} \tag{321}$$

Pierwszy z warunków odpowiada $p = 0$. Ze względu na ograniczenie danych materiałowych, przyjmuje się pewną małą, ale nie zerową wartość ρ na zewnętrznym brzegu. Drugi warunek wynika z równania (225), które w przybliżenu Eddingtona wyraża fakt, że gwiazda nie jest oświetlana z zewnątrz.

Mamy tyle równań i warunków brzegowych ile niewiadomych funkcji. *Twierdzenie Vogta-Russella*, mówiące że z materii o danym składzie chemicznym i danej masie można skonstruować jeden i tylko jeden model gwiazdy jest jednak fałszywe. Na przykład, w zakresie mas od ok 0.1 do ok. 3 $M_\odot$ można z materii o takim składzie chemicznym jak w otoczce Słońca, zbudować zarówno gwiazdę ciągu głównego, w której jądrze zachodzi synteza helu jak i zimnego białego karła. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych nie stosuje się do problemów brzegowych. Istnieją warunki przy których nie ma żadnego rozwiązania równań. Na przykład, nasz układ równań nie ma rozwiązań dla $M < 0.08M_\odot$. Obiekty takie nie osiągają minimalnych tempertur w centrum potrzebnych do syntezy He.

Zadanie: Przyjmując w przybliżeniu

$$M_r \approx M \text{ i } L_r \approx L,$$

równanie gazu doskonałego, $\nabla_{\rm rad} \leq \nabla_{\rm ad}$ i współczynnik nieprzezroczystości w postaci

$$\kappa = \kappa_0 \rho^q T^{-s},$$

gdzie q i s są dodatnimi stałymi, proszę pokazać, że – poczynając od pewnej głębokości – struktura otoczki jest w przybliżeniu politropowa.
Wskazówka: Skorzystać z tego, że p i T są szybko malejącymi funkcjami r dla $r \approx R$.

11.2.2 Algorytm

Równania (316-319) rozwiązuje się metodą iteracji ze zszywaniem w punkcie pośrednim, $M_r = M_{\rm fit}$. Potrzebna jest znajomość przybliżonych wartości $\rho(0) = \rho_c$, $T(0) = T_c$, L oraz $T_{\rm eff}$ lub R. Rozwiązanie od centrum ku górze rozpoczyna się od skończonej, ale dostatecznie małej wartości M_r. Wtedy, możemy położyć w (316) $\rho = \rho_c$, skąd mamy

$$r = \left(\frac{3M_r}{4\pi\rho_c} \right)^{1/3}. \tag{322}$$

Z równania

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$$

dla $r \to 0$, wynika

$$\left(\frac{d^2p}{dr^2} \right)_c = -\frac{4\pi}{3} G\rho_c^2.$$

Skąd i z (322) mamy

$$p = p_c - \frac{G}{2} M_r^{2/3} \left(\frac{4}{3}\pi\rho_c^4 \right)^{1/3}, \tag{323}$$

gdzie $p_c = p(\rho_c, T_c)$. Z (318) mamy

$$L_r = \epsilon_c M_r, \tag{324}$$

a podstawiając to do (319) otrzymujemy

$$T = T_c - \frac{T_c}{p_c} {\rm Min}(\nabla_{{\rm rad},c}, \nabla_{{\rm ad},c}) \frac{G}{2} M_r^{2/3} \left(\frac{4}{3}\pi\rho_c^4 \right)^{1/3}, \tag{325}$$

gdzie

$$\nabla_{{\rm rad},c} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{p_c \kappa_c \epsilon_c}{T_c}. \tag{326}$$

Tu, podobnie jak w całym głębokim wnętrzu, przyjęliśmy $\nabla_n = 0$.
Dalej, posługując się różnicową reprezentacją równań (316-319), kontynuuje się wyliczanie zmiennych aż do wybranej wartości $M_r = M_{\rm fit}$. Z powodów numerycznych nie dochodzi się do powierzchni gwiazdy. Oznaczmy wartości czterech wybranych zmiennych zależnych w punkcie zszycia przez $y_{j,{\rm core}}$ ($j =$

$1, 2, 3, 4)$. Wartości te są funkcjami $\rho_c = x_1$ i $T_c = x_2$. Całkowanie od powierzchni wgłąb wykonujemy dla próbnych wartości $L = x_3$ i $T(M) = (\frac{1}{2})^{1/4} T_{\rm eff} = x_4$. Przyjmując, na przykład, $\rho(M) = 10^{-12}$ mamy już wszystkie dane do rozpoczęcia całkowania wgłąb do $M_r = M_{\rm fit}$. Wartości zmiennych zależnych w tym punkcie oznaczamy teraz $y_{j,\rm env}$.

Na ogół stwierdzamy, że

$$d_j = y_{j,\rm env} - y_{j,\rm core} \neq 0.$$

Zmieniamy więc wartości x_k tak długo, aż osiągniemy dopasowanie z założoną dokładnością. (Maksymalna wartość $|d_j/y_j|$ mniejsza od ustalonej małej liczby.) Poprawki Δx_k można wyznaczać posługując się n.p. metodą iteracji zakładając przybliżenie liniowe w każdym kroku. Wtedy bieżące wartości Δx_k dostajemy jako rozwiązania równań.

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial y_{j,\rm core}}{\partial x_k} \Delta x_k - \sum_{k=3}^{4} \frac{\partial y_{j,\rm env}}{\partial x_k} \Delta x_k = d_j. \tag{327}$$

Pochodne cząstkowe wyliczamy numerycznie. Wyznaczone poprawki dodaje się do x_k i proces powtarza, aż do uzyskania wymaganej dokładności zszycia.

11.3 Niestabilność cieplna

Równanie (327) nie ma rozwiązań jeżeli wyznacznik macierzy

$$\mathcal{M}_{jk} \equiv \frac{\partial y_{j,\rm core}}{\partial x_k} - \frac{\partial y_{j,\rm env}}{\partial x_k}$$

znika. Zauważmy, że znikanie wyznacznika oznacza, że model gwiazdy jest neutralnie stabilny względem zaburzeń nie naruszających równowagi mechanicznej, które nazwiemy *cieplnymi*. Zmiana znaku wyznacznika w ciągu modeli gwiazd oznacza, że mamy do czynienia z przejściem do modeli niestabilnych, które nie mogą opisywać rzeczywistych obiektów.

Równania opisujące narastania zaburzeń cieplnych dostaniemy z linearyzacji równania (244) zakładając w nim zale zność czasową wielkości zaburzonych w postaci $\exp(\gamma t)$, niezmienność składu chemicznego oraz równowagę zaburzanego modelu.

$$T\gamma\delta S = \delta\epsilon - \delta\frac{\rm div\mathbf{F}}{\rho}.$$

Prawą stronę tego równania można wyrazić w formie operatora liniowego działającego na δS i zależnego tylko od parametrów modelu.

W symetrii sferycznej mamy

$$\delta\frac{\rm div\mathbf{F}}{\rho} = \frac{d\delta L_r}{dM_r}.$$

Stąd i z linearyzacji zależności $\epsilon(\rho, T)$, mamy

$$T\gamma\delta S = \epsilon\left(\epsilon_T\frac{\delta T}{T} + \epsilon_\rho\frac{\delta\rho}{\rho}\right) - \frac{d\delta L_r}{dM_r}. \tag{328}$$

Tu jako podstawowych zmiennych termodynamicznych używamy S i p. Korzystamy ze znanych nam zależności

$$\frac{\delta T}{T} = \nabla_{\rm ad}\frac{\delta p}{p} + \frac{\delta S}{c_p} \tag{329}$$

i

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\delta p}{p} - \frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{\delta S}{c_p} \tag{330}$$

do wyeliminowania δT i $\delta\rho$.

W obszarach wydajnej konwekcji mamy

$$\frac{d\delta S}{dM_r} = 0. \tag{331}$$

O obszarach niewydajnej konwekcji, jako leżących blisko powierzchni, można założyć że pozostają w równowadze cieplnej. Dla obszarów promienistych, będzie nam najwygodniej skorzystać ze związku

$$\frac{d\ln T}{dM_r} \propto \frac{L_r\kappa}{(rT)^4},$$

który wynika z (319) z uwzględnieniem (316) i (317) i którego linearyzacja daje nam związek

$$\frac{d}{dM_r}\frac{\delta T}{T} = \nabla_{\rm rad}\frac{d\ln p}{dM_r}\left[\frac{\delta L_r}{L_r} + (\kappa_T - 4)\frac{\delta T}{T} + \kappa_\rho\frac{\delta\rho}{\rho} - 4\frac{\delta r}{r}\right]. \tag{332}$$

Przechodząc od stosowania równania (331) do (332) należy pamiętać, że zaburzenie na ogół zmienia granicę obszaru konwekcji. Przesunięcie granicy dane jest przez

$$\delta M_c = -\delta D\left(\frac{dD}{dM_r}\right)^{-1},$$

gdzie $D \equiv \nabla_{\rm rad} - \nabla_{\rm ad}$.

Skoncentrujemy teraz uwagę na obszarze niekonwektywnym. Z (332), po skorzystaniu z (329) i (330), wynika następujące wyrażenie na zaburzenie strumienia promienistego.

$$\frac{\delta L_r}{L_r} = -\frac{4\pi p r^4}{GM_r\nabla_{\rm rad}}\frac{d}{dM_r}\left(\frac{\delta S}{c_p} + \nabla_{\rm ad}\frac{\delta p}{p}\right) + 4\frac{\delta r}{r} + b_s\frac{\delta S}{c_p} + b_p\frac{\delta p}{p}, \tag{333}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$b_s \equiv 4 - \kappa_T + \kappa_\rho\frac{\chi_T}{\chi_\rho}$$

i

$$b_p \equiv (4-\kappa_T)\nabla_{\rm ad} - \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1}.$$

Związki łączące δp i δr z δS dostaniemy z linearyzacji równań (316) i (317), uwzględniając w pierwszym z nich (330). Mamy, kolejno,

$$\frac{d\delta r}{dM_r} = -\left(2\frac{\delta r}{r} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\delta p}{p} - \frac{\chi_T}{\chi_\rho}\frac{\delta S}{c_p}\right)\frac{dr}{dM_r} \tag{334}$$

i

$$\frac{d\delta p}{dM_r} = -4\frac{\delta r}{r}\frac{dp}{dM_r} \tag{335}$$

Eliminacja δr prowadzi nas do równania liniowego na δp z niejednorodnością proporcjonalną do δS. Nie wypisując tu jego postaci, ograniczamy się do zauważenia, że równanie to ma rozwiązania, poza przypadkiem neutralnej stabilności dynamicznej. Z tym wyjątkiem, rozwiązanie na δp można uzyskać metodą funkcji Greena. W ten sposób dostajemy

$$\delta p(M_r) = \int d\tilde{M}_r \mathcal{G}(M_r, \tilde{M}_r)\frac{\delta S}{c_p}, \tag{336}$$

gdzie funkcja Greena, $\mathcal{G}$, zbudowana jest z rozwiązań równania jednorodnego, a więc możemy ją uważać ze znaną. Odpowiednie wyrażenie na δr dostaniemy z (335) i (336),

$$\delta r(M_r) = -\frac{r}{4}\frac{dM_r}{dp}\int d\tilde{M}_r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M_r}\frac{\delta S}{c_p}. \tag{337}$$

Równania (333) (336) i (337) dają nam całkowy związek pomiędzy δL_r przez δS. Korzystając z niego oraz ze związków (329-330) i (336) w (328). dostaniemy równanie na wartość własną γ,

$$T\gamma\delta S = \mathcal{N}(\delta S), \tag{338}$$

gdzie $\mathcal{N}$ jest poszukiwanym operatorem liniowym, którego skomplikowana jawna postać nie będzie nam potrzebna. Zauważmy tylko, że jest to operator różniczkowo - całkowy i, na ogół, nie hermitowski, a to oznacza, że jego wartości własne mogą tworzyć zespolone pary γ i $\gamma*$. Wynika stąd dalej, że przejście od modeli stabilnych do niestabilnych może zajść w modelu z $Det(\mathcal{M}_{jk}) \neq 0$.

Jeżeli założymy równanie stanu doskonałego oraz stałe współczynniki ϵ_T, ϵ_ρ, κ_T i κ_ρ, to rozwiązań równania można szukać w postaci *homologicznej* z $\delta r/r =$ const.

Mamy wtedy z (335)

$$\frac{\delta p}{p} = -4\frac{\delta r}{r},$$

z (334)

$$\frac{\delta S}{c_p} = 3\frac{\delta r}{r} + 0.6\frac{\delta p}{p} = -0.15\frac{\delta p}{p},$$

z (319) i (320)

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = 0.75\frac{\delta p}{p} \qquad \frac{\delta T}{T} = 0.25\frac{\delta p}{p}.$$

Po skorzystaniu z powyższych związków w (333), dostajemy

$$\frac{\delta L_r}{L_r} = (-0.15b_s + b_p - 1)\frac{\delta p}{p} = -(0.25\kappa_T + 0.75\kappa_\rho)\frac{\delta p}{p}.$$

Podstawiamy to wyrażenie na δL_r oraz wyrażenia zaburzeń innych wielkości przez $\frac{\delta p}{p}$ do równania (328) i korzystając jeszcze z (318), dostajemy

$$[0.6c_pT\gamma + \epsilon(\epsilon_T + \kappa_T + 3\epsilon_\rho + 3\kappa_\rho)]\frac{\delta p}{p} = 0.$$

Wynikający stąd wzór na γ nie prowadzi do wartości niezależnej od M_r . Tym nie mniej, dla przybliżonej oceny stabilności, możemy skorzystać ze scałkowanej wersji tego warunku, którą można zapisać w postaci.

$$\bar{\gamma} = -\frac{5(\epsilon_T + \kappa_T) + 15(\epsilon_\rho + \kappa_\rho)}{3\tilde{\tau}_{\rm th}}, \tag{339}$$

gdzie

$$\tilde{\tau}_{\rm th} = L^{-1}\int dM_r c_p T \sim \tau_{\rm th}.$$

Tylko wyraz κ_T jest (przeważnie)< 0, nie na tyle jednak by dostać $\bar{\gamma} > 0$.

To, że zaburzenia ϵ (wbrew oczekiwaniu) działają stabilizująco, wynika z przeciwnych znaków zaburzeń entropii i temperatury w przypadku homologicznym. Spodziewamy się podobnej sytuacji dla realistycznych wielkoskalowych zaburzeń gwiazd zbudowanych z gazu niezdegenerowanego. Odwrotną sytuację będziemy mieli w przypadku gazu zdegenerowanego, bo wtedy dla zaburzeń cieplnych mamy

$$|\frac{\delta p}{p}| \ll |\frac{\delta T}{T}|$$

i

$$\frac{\delta S}{c_p} \approx \frac{\delta T}{T}.$$

Nie działa ciśnieniowy *zawór bezpieczeństwa* i reakcje jądrowe zaczynają się w sposób eksplozywny.

Podobnie dla zaburzeń zlokalizowanych w cienkich warstwach z aktywnymi reakcjami jądrowymi, co wynika z całkowej zależności pomiędzy δp i δS, bo nie można znacząco zmienić ciśnienia zmieniając rozkład masy w takiej warstwie. Z taką niestabilnością spotykamy się w fazie palenia helu w warstwie na zdegenerowanyn jądrem węglowo-tlenowym. Niestabilność zaczyna się od zmiany znaku części rzeczywistej w zespolone wartości γ i przejawia w formie quasi-okresowych pulsów cieplnych.