7 Przepływ promieniowania przez atmosfery gwiazdowe

W atmosferach gwiazdowych pole promieniowania jest silnie anizotropowe. W szczególności, warunek jaki możemy nałożyć na strumień na zewnętrznym brzegu izolowanej gwiazdy ma postać

$$I_\nu(\theta, R) = 0 \quad \text{dla} \quad \theta \in [\pi/2, \pi], \tag{181}$$

a zatem jest skrajnie nieizotropowy. Ponadto, droga swobodna fotonu w atmosferze jest porównywalna lub dłuższa od temperaturowej skali odległości, a więc wydaje się, że nawet w grubym przybliżeniu nie można korzystać z równania (172).

7.1 Równanie transportu (transferu) promieniowania

Tu rozpatrzymy najogólniejszą formę tego prawa. Natężenie promieniowania, I_ν, traktujemy jako funkcję czasu, t, miejsca w atmosferze, $\boldsymbol{x}$, kierunku, $\boldsymbol{k}$ (zauważmy, że jeśli $\boldsymbol{n}$ oznacza kierunek normalnej do wybranej powierzchni, to $\mu \equiv \cos\theta = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}$) i częstotliwości ν. Argumenty I_ν będą wypisywane jawnie tylko w miarę potrzeby. Rozważmy zmianę natężenia I_ν w kierunku $\boldsymbol{k}$, na odcinku drogi $ds = \boldsymbol{k} \cdot d\boldsymbol{x} = cdt$. W próżni wielkość I_ν jest zachowana. Jeżeli na ds znajduje się materia, to I_ν może maleć w wyniku absorbcji i wzrastać w wyniku emisji promieniowania przez gaz. Może też zmieniać się w wyniku rozpraszania. Zjawiska te weźmiemy pod uwagę we wzorze na szybkość zmian I_ν pisząc

$$\frac{dI_\nu}{dt} = c\rho\kappa_\nu(S_\nu - I_\nu), \tag{182}$$

w którym

$$\kappa_\nu = \kappa_{a,\nu} + \kappa_{s,\nu}.$$

Tak jak w poprzednim rozdziale, κ_ν i $\kappa_{a,\nu}$ oznaczają, odpowiednio, monochromatyczne współczynniki nieprzezroczystości i absorbcji, a $\kappa_{s,\nu}$ wklad do nieprzezroczystości pochodzący od rozpraszania. Tu jednak uwzględniamy nie tylko rozpraszanie na elektronach (*efekt Comptona*), ale bierzemy też pod uwagę rozpraszanie na atomach i molekułach (*efekt Rayleigha*), które wnosi pewien wkład do nieprzezroczystości w atmosferach gwiazd chłodnych. $S_\nu = S_\nu(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t)$, wielkość nazywana *funkcją źródłową*, dana jest wzorem

$$S_\nu(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\kappa_\nu}\left(\frac{j_\nu}{4\pi} + \kappa_{s,\nu}\oint d\varpi' \int_0^\infty d\nu' \phi_{\nu'\nu}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) I_\nu(\boldsymbol{k}')\right). \tag{183}$$

Pierwszy człon z prawej strony opisuje wkład od emisji gazu. Współczynnik emisji, j_ν, podaje ilość energii promieniowania na jednostkę częstotliwości w przedziale $\nu \pm 0.5d\nu$ wysyłanej przez jednostkę masy gazu w jednostce czasu. Emisję wymuszoną najczęściej uwzględnia się jako ujemną absorbcje. Drugi człon opisuje wkład pochodzący od rozpraszania, które może być niekoherentne i anizotropowe. Rozpraszanie nazywamy koherentnym jeżeli nie zmienia energii fotonu. Funkcja rozkładu, $\phi_{\nu'\nu}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})$, opisuje prawdopodobieństwo, że foton o częstotliwości ν' nadbiegający z kierunku $\boldsymbol{k}'$ po rozproszeniu będzie miał częstotliwość ν i odleci w kierunku $\boldsymbol{k}$. Funkcję rozkładu normalizuje warunek

$$\oint d\varpi \int_0^\infty d\nu \oint d\varpi' \int_0^\infty d\nu' \phi_{\nu'\nu}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) = 1.$$

Rozpraszanie nie prowadzi do wypadkowej wymiany energii między gazem i promieniowaniem. Dla rozpraszania koherentnego

$$\phi_{\nu'\nu}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) = \delta(\nu' - \nu)\phi(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}),$$

a jeśli przy tym jest ono izotropowe, to mamy

$$\phi_{\nu'\nu}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) = \delta(\nu' - \nu)\frac{\delta(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})}{4\pi}.$$

Ponieważ dla promieniowania mamy

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{d}{ds},$$

w przypadku stacjonarnym równanie(182) przyjjmuje postać

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \rho\kappa_\nu(S_\nu - I_\nu), \tag{184}$$

znaną jako *Równanie Transferu*. To równanie można formalnie scałkować, wprowadzając bezwymiarową zmienną niezależną D_ν, zdefiniowaną wzorem

$$D_\nu = \int ds\rho\kappa_\nu$$

i nazywaną odległością optyczną. Z nią, równanie (184) przekształca się w

$$\frac{dI_\nu}{dD_\nu} + I_\nu = S_\nu(D_\nu).$$

Po pomożeniu stronami przez $\exp(D_\nu)$ i scałkowniu w przedziale $[0, D_\nu]$, dostajemy

$$I_\nu(D_\nu) = I_\nu(0)\mathrm{e}^{-D_\nu} + \int_0^{D_\nu} S_\nu(\tilde{D})\mathrm{e}^{(\tilde{D}-D_\nu)}d\tilde{D} \tag{185}$$

Wzór ma czytelny sens fizyczny, ale nie daje jawnego wyrażenia na natężenie bo, jak widzimy we wzorze (183), S_ν zależy od I_ν .

Równanie transferu uzupełnia warunek równowagi cieplnej, który można zapisać w formie całkowej wyrażającej brak wypadkowego przepływu energii pomiędzy promieniowaniem i gazem wynikającego z emisji i absorbcji.

$$\int_0^\infty (j_\nu - 4\pi\kappa_{a,\nu}\mathcal{J}_\nu)d\nu = 0, \tag{186}$$

gdzie

$$\mathcal{J}_\nu \equiv \frac{1}{4\pi}\oint d\varpi I_\nu \tag{187}$$

jest średnim natężeniem promieniowania.

Ze (186) wynika podany w rozdziale 6.2 warunek równowagi cieplnej $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0$, gdzie przez $\boldsymbol{F}$ oznaczyliśmy całkowity strumień energii przenoszonej przez promieniowanie. Jednak podany tam wzór $\boldsymbol{F}$ zakłada przybliżenie dyfuzyjne, którego teraz nie chcemy stosować. Wzory (157) i (158) podają ścisłe zależności wiążace I_ν ze składowymi normalnymi strumienia monochromatycznego i bolometrycznego. Wszystkie trzy składowe $\boldsymbol{F}$ dane są wyrażeniem

$$\boldsymbol{F} = \int_0^\infty d\nu \oint d\varpi \boldsymbol{k} I_\nu \tag{188}$$

Zadanie Pokazać, że ze (186) i (188) wynika $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0$.

Dla uzyskania jawnego wyrażenia na I_ν, potrzebnego do znalezienia strumienia F_ν ze wzoru (188) musimy rozwiązać jednocześnie równania całkowe (185) i (186). W miejsce (185) możemy posłużyć się równaniem różniczkowym (184). Dla rozwiązania potrzebna jest nam także znajomość funkcji $\kappa_{a,\nu}$, j_ν i $\phi_\nu(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})$, z których tylko tej pierwszej poświęciliśmy nieco uwagi w poprzednim rozdziale. Całą drogę od wspomnianych równań do jawnej postaci I_ν i do modeli atmosfer gwiazdowych prześledzimy jedynie po wprowadzeniu szeregu uproszczeń.

7.2 Standardowe przybliżenia

7.2.1 Lokalna równowaga termodynamiczna

W zastosowaniu do atmosfer gwiazdowych pojęcie lokalnej równowagi termodynamicznej (LTE) odnosi się do tylko do gazu. Ma sens mówienie o takiej równowadze w obecności pola promieniowania, gdy o stanie gazu decydują zderzenia między molekułami (atomami). Wtedy chociaż, $I_\nu \neq \mathcal{B}_\nu(T)$, stan gazu określa temperatura, T, a współczynniki absorbcji związane są *prawem Kirchoffa*,

$$j_\nu = 4\pi\kappa_{a,\nu}\mathcal{B}_\nu(T) \tag{189}$$

Wynika stąd że, jezeli można pominąć efekty rozpraszania to funkcja źródłowa jest równa funkcji Plancka ($S_\nu = \mathcal{B}_\nu$). Okazuje się, że w szerokim zakresie atmosfer założenie LTE daje dobre przybliżenie. Znaczące odchylenia zachodzą dla gwiazd, w których procesy odziaływania gazu z promieniowaniem (procesy promieniste) dominują nad zderzeniowymi w ustalaniu stanu równowagi. W tym wykładzie jednak będziemy zawsze zakładali LTE.

Po skorzystaniu z prawa Kirchoffa w równaniu (186) dostajemy jawną, choć nielokalną, zależność wiążącą charakterystyki pola promieniowania z temperaturą,

$$\int_0^\infty \kappa_{a,\nu}\mathcal{B}_\nu(T)d\nu = \int_0^\infty \kappa_{a,\nu}\mathcal{J}_\nu d\nu, \tag{190}$$

.

7.2.2 Rozpraszanie koherentne i izotropowe

Odstępstwa od koherencji rozpraszania istotne są tylko w niektórych liniach widmowych i zwykle są pomijane w modelowaniu widma ciągłego. Kolejnym czesto uzywanym przybliżeniem atmosfer gwiazd jest założenie izotropowość rozpraszania. Pomimo że w indywidualny akt rozproszenia jest anizotripowy przybliżenie może być z powodzeniem stosowane. Dla rozpraszania koherentnego i izotropowego mamy

$$\phi_{\nu'\nu}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) = \delta(\nu' - \nu)\frac{\delta(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})}{4\pi}.$$

Korzystając z tego i ze (187) w (183), dostajemy najczęściej spotykaną postać funkcji źródłowej

$$S_\nu = (1 - \chi_\nu)\mathcal{B}_\nu + \chi_\nu \mathcal{J}_\nu, \tag{191}$$

gdzie $\chi_\nu = \kappa_{s,\nu}/\kappa_\nu$. Tej postaci funkcji żródłowej będziemy używać dalej w tym wykładzie.

7.2.3 Równanie transferu w symetrii sferycznej

Zakładamy symetrię sferyczną gwiazdy. Zatem funkcja źródłowa, oraz ρ i κ_ν występujące w równaniu (184) traktujemy jako funkcje tylko współrzędnej r. Natomiast I_ν zależy również od kąta θ pomiędzy wersorem $\boldsymbol{k}$, skierowanym ku obserwatorowi, a normalną do sfery $\boldsymbol{n}$. Piszemy

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nabla} I_\nu.$$

Oś biegunową kierujemy ku obserwatorowi i wtedy z geometrii wynikają związki

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_r = \cos\theta \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_\theta = -\sin\theta.$$

Stąd dostajemy.

$$\cos\theta \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} = \rho\kappa_\nu(S_\nu - I_\nu), \tag{192}$$

Uwzględnienie geometrii sferycznej, co jest istotne dla nadolbrzymów nie stanowi istotnego utrudnienia. Nadal jednak najczęściej używane jest przybliżenie atmosfery płasko-równoległej.

7.2.4 Atmosfera płasko-równoległa

Jako dolne ograniczenie przyjmiemy miejsce od którego przybliżenie dyfuzyjne jest dostatecznie dokładne. Górnym jest miejsce powyżej którego leży obszar traktowany jako przezroczysty dla fotonów. Zaniedbanie krzywizny atmosfery jest uzasadnone wtedy gdy jej głębokość geometryczna, Δr, jest dużo mniejsza od promienia krzywizny. Dla Słońca, przyjmując za górną granicę atmosfery miejsce odpowiadające minimum temperatury, a za dolną miejsce gdzie można już korzystać z przybliżenia dyfuzyjnego, mamy $\Delta r \approx 4 \times 10^{-3}$.

Dla założonego składu chemicznego, atmosferę chrakteryzują dwa, traktowane jako stałe, parametry bolometryczny strumień promieniowania na jednostkę powierzchni,

$$\frac{L}{4\pi R^2} = F_{\mathrm{bol}} \equiv F_{\mathrm{rad}} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu$$

oraz przyspieszenie grawitacyjne, $g = GM/R^2$

Natężenie promieniowania, $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$, traktujemy jako funkcję głębokości optycznej

$$\tau_\nu = \int_r^R \kappa_\nu \rho d\tilde{r},$$

gdzie R_s jest zewnętrznym promieniem atmosfery, i cosinusem kąta pomiędzy normalną do powierzchni i wybranym kierunkiem całkowania, μ. Mamy więc

$$ds = \frac{dr}{\mu} = -\frac{d\tau_\nu}{\kappa_\nu \rho \mu}.$$

Używając tego wzoru w (184) dostajemy najczęściej spotykaną postać równania transferu,

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - I_\nu = -S_\nu \tag{193}$$

Postępując podobnie jak w rozdziale 7.1, możemy to równanie scałkować (tu pomiędzy τ_1 i τ_ν) dostając jako wynik

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = I_\nu(\tau_1, \mu) \exp\left(\frac{\tau_\nu - \tau_1}{\mu}\right) - \int_{\tau_1}^{\tau_\nu} S_\nu(\tilde{\tau}) \exp\left(\frac{\tau_\nu - \tilde{\tau}}{\mu}\right) \frac{d\tilde{\tau}}{\mu}. \tag{194}$$

Użyteczną formę wyrażenie na $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$ znajdziemy rozważając oddzielnie promieniowanie skierowane na zewnątrz ($\mu \geq 0$) i do wewnątrz. W pierwszym przypadku wybieramy $\tau_1 = \infty$ oraz korzystamy z tego, że I_ν pozostaje skończone przy $\tau_\nu \to \infty$. Mamy wtedy ze (194)

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tilde{\tau}) \exp\left(\frac{\tau_\nu - \tilde{\tau}}{\mu}\right) \frac{d\tilde{\tau}}{\mu} \quad \text{dla} \quad \mu \geq 0. \tag{195}$$

W drugim przypadku wybieramy $\tau_1 = 0$ oraz korzystamy z tego, że na brzegu gwiazdy $I_\nu(0) = 0$ (patrz rów. 181). Teraz ze (194) wynika

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tilde{\tau}) \exp\left(\frac{\tau_\nu - \tilde{\tau}}{\mu}\right) \frac{d\tilde{\tau}}{-\mu} \quad \text{dla} \quad \mu \leq 0. \tag{196}$$

Wzory (195) i (196) nie dają nam jawnej postaci $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$, ponieważ S_ν zależy od I_ν poprzez $\mathcal{J}_\nu$, są jednak bardzo użyteczne dla uzyskiwania przybliżonych rozwiązań równania transferu i w iteracyjnych metodach uzyskiwania ścisłych jego rozwiązań.

Korzystając ze (195) i (196) w we wzorach (155), (157) i (159) można wyprowadzić (co pozostawiam do wykonania na ćwiczeniach) *wzory Schwarzschilda-Milne'a* wiążące gęstość energii, strumień i ciśnienie promieniowania z funkcją źródłową,

$$\mathcal{E}_\nu(\tau_\nu) = \frac{4\pi}{c}\mathcal{J}_\nu = \frac{2\pi}{c}\int_0^\infty S_\nu(\tilde{\tau})\eta_1|\tilde{\tau} - \tau_\nu|d\tilde{\tau}, \tag{197}$$

$$\mathcal{F}_\nu = 2\int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(\tilde{\tau})\eta_2|\tilde{\tau} - \tau_\nu|d\tilde{\tau} - 2\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tilde{\tau})\eta_2|\tilde{\tau} - \tau_\nu|d\tilde{\tau}, \tag{198}$$

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi}{c}\int_0^\infty\int_0^\infty S_\nu(\tilde{\tau})\eta_3|\tilde{\tau} - \tau_\nu|d\tilde{\tau}d\nu, \tag{199}$$

gdzie

$$\eta_j(x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xz)}{z^j}dz$$

Ze (195) wynika wprost wyrażenie na rozkład intensywności na tarczy gwiazdy, czyli na *prawo pociemnienia brzegowego*,

$$I_\nu(0,\mu) = \int_0^\infty S_\nu(\tilde{\tau})\exp\left(-\frac{\tilde{\tau}}{\mu}\right)\frac{d\tilde{\tau}}{\mu}. \tag{200}$$

Środek tarczy odpowiada $\mu = 1$, a brzeg $\mu = 0$. Ten związek leży u podstaw pół-empirycznego modelu atmosfery Słońca. Z obserwacji znana jest funkcja $I_\nu(0,\mu)$. Funkcję $S_\nu(\tau_\nu)$ dostaje się jako rozwiązanie równania całkowego (195). Z niej, wykorzystując równania (197-199) i warunki równowagi, wyznacza się przebieg parametrów fizycznych w atmosferze.

Przyjmując w (200) liniową zależność funkcji źródłowej od głębokości optycznej, $S_\nu(\tau_\nu) = S_{0\nu} + S_{1\nu}\tau_\nu$, dostajemy *wzór Eddingtona-Barbiera*,

$$I_\nu(0,\mu) = S_{0\nu} + S_{1\nu}\mu = S_\nu(\tau_\nu = \mu). \tag{201}$$

Im dalej od środka traczy, tym płytsze warstwy "widzimy".

7.2.5 Przybliżenie dyfuzyjne

Równania opisujące transfer w atmosferze płasko-równoległej znajdują zastosowanie w całym wnętrzu gwiazdy w którym droga swobodna fotonu jest, ℓ_p, jest znacznie krótsza od promienia krzywizny. Tu prześledzimy przejście od równania transferu (193) do równania (167) na strumień w przybliżeniu dyfuzyjnym przy $\tau_\nu \to \infty$.

Dla $\tau_\nu \to \infty$ promieniownie zmierza do lokalnej równowagi termodynamicznej z gazem i izotropii. Zatem z definicji (187) i (160), mamy

$$\mathcal{J}_\nu = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 I_\nu d\mu \to \mathcal{B}_\nu. \tag{202}$$

i dalej, ze (191) $S_\nu \to \mathcal{B}_\nu$ niezależnie od wartości χ_ν. Zatem w obszarze o dostatecznie dużych głębokościach optycznych możemy przedstawić funkcję źródłową w formie szeregu Taylora

$$S_\nu(\tilde{\tau}) = \sum_{j=0} \left(\frac{d^j \mathcal{B}_\nu}{d\tau_\nu^j} \right) \frac{(\tilde{\tau} - \tau_\nu)^j}{j!}$$

wokół τ_ν, gdzie można założyć równość $S_\nu = \mathcal{B}_\nu$.

Po podstawieniu tego szergu do (195) lub do (196) (wynik będzie identyczny) dostajemy wyrażenie na intensywność promieniowania w formie szeregu potęgowego μ

$$I_\nu = \mathcal{B}_\nu(\tau_\nu) + \frac{d\mathcal{B}_\nu}{d\tau_\nu}\mu + \frac{d^2\mathcal{B}_\nu}{d\tau_\nu^2}\mu^2 + .., \tag{203}$$

wiążącą gradient temperatury z anizotropią intensywności promieniowania. Ocenę stosunku kolejnych wyrazów tego szeregu daje nam

$$\epsilon \equiv \frac{d\ln \mathcal{B}_\nu}{d\tau_\nu} \sim -\frac{d\ln T}{dr}\frac{1}{\kappa_\nu \rho} = \frac{\ell_{p,\nu}}{H_T},$$

wielkość która pod fotosferą staje się szybko $\ll 1$. Dobre przybliżenie na strumień promieniowania dostaniemy ograniczając się do liniowego wyrazu tego szergu. Po podstawieniu do (157) dostajemy

$$\mathcal{F}_\nu = 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\mathcal{B}_\nu \mu + \frac{d\mathcal{B}_\nu}{d\tau_\nu}\mu^2 \right) d\mu = \frac{4\pi}{3}\frac{d\mathcal{B}_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu \rho}\frac{d\mathcal{B}_\nu}{dr},$$

czyli wzór (167).

7.2.6 Atmosfera szara

Przez dziesięciolecia, modelowanie atmosfer gwiazdowych dokonywane było w przybliżeniu polegającm na zaniedbaniu zależnośći κ i j od ν, nazywanym przybliżeniem *atmosfery szarej.* Wprowadza się na użytek tego przybliżenia natępujące definicje

$$I(\tau, \mu) \equiv \int_0^\infty d\nu I_\nu(\tau, \mu), \tag{204}$$

$$J(\tau) \equiv \int_0^\infty d\nu \mathcal{J}_\nu(\tau) \tag{205}$$

i

$$S \equiv \int_0^\infty d\nu S_\nu. \tag{206}$$

Warunek równowagi cieplnej (190), z wykorzystaniem definicji (170), sprowadza się teraz do

$$J \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I d\mu = B(T), \tag{207}$$

a ze (191) mamy

$$S = B = J.$$

Równanie (193) scałkowane po częstotliwościach w połaczeniu z (207) postać równania całkowo-różniczkowego, na pojedynczą funkcje $I = I(\tau, \mu)$,

$$\mu \frac{dI}{d\tau} - I = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I d\mu. \tag{208}$$

Rozwiązania tego równania automatycznie spełniają warunek równowagi cieplnej

$$\frac{dF_{\rm rad}}{d\tau} = 2\pi \int_{-1}^{1} \mu \frac{dI}{d\tau} d\mu = 0.$$

Podobną własność mają rozwiązania równania całkowego na $J(\tau)$, wynikającego ze (197)

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} J(\tilde{\tau}) \eta_1 |\tilde{\tau} - \tau| d\tilde{\tau}. \tag{209}$$